ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.518.83

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА НА КЛАССАХ ТИПА СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

И. И. Шарапудинов

Отдел математики и информатики ДНЦ РАН

Рассмотрены вопросы приближения в $L_{2\pi}^{p(x)}$ функций средними Валле-Пуссена

$$V_m^n(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_{n+k}(f,x)$$

тригонометрических сумм Фурье $S_{n+k}(f,x)$ функций $f(x)$, принадлежащих пространствам типа Соболева $W_{p(\cdot)}^r$ с переменным показателем $p(x)$, удовлетволяющим условию Дини – Липшица. Как следствие этих результатов, в $L_{2\pi}^{p(x)}$ установлен аналог второй теоремы Джексона в том случае, когда 2π-периодический переменный показатель $p(x) \geq 1$ при $x \in \mathbb{R}$. Ранее такая теорема была доказана лишь при условии $p_- = \min_{x\in\mathbb{R}} p(x) > 1$.

Problems of approximation in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by Vallee-Poussin means

$$V_m^n(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_{n+k}(f,x)$$

for functions from Sobolev type classes $W_{p(\cdot)}^r$ with variable exponent $p(x)$, satisfying Dini – Lipschitz condition, are considered in this paper. As a corollary from these results it is established analog of second Jackson theorem in case when 2π-periodic variable exponent $p(x) \geq 1$ for $x \in \mathbb{R}$. In the past such theorem was proved only when $p_- = \min_{x\in\mathbb{R}} p(x) > 1$.

Ключевые слова: теория приближений; пространства типа Соболева с переменным показателем; средние Валле-Пуссена; условие Дини – Липшица.

Keywords: approximation theory; Sobolev type spaces with variable exponent; Vallee-Poussin means; Dini – Lipschitz condition.

§ 1. Введение

Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых по Лебегу функций, определенных на измеримом множестве E и таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)}dx < \infty,$$

где $p(x)$ − измеримая на E функция. Если $p(x) \geq 1$, $x \in E$ и существенно ограничена на E, то $L^{p(x)}(E)$ можно превратить [1] в нормированное пространство с нормой

$$||f||_{p(\cdot)} = \inf\{\alpha > 0: \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leq 1\}. \tag{1.1}$$

Теория и приложения пространств $L^{p(x)}(E)$ вызывает [2−8] в последнее время все усиливающийся интерес у специалистов самых различных областей. Не являются исключением и вопросы теории приближений в пространствах $L^{p(x)}(E)$. В работах [9], [1] впервые были рассмотрены некоторые общие вопросы теории приближений. В частности, в этих работах были установлены критерии для полиномов, наименее уклоняющихся от функций $f \in L^{p(x)}(E)$. В работе автора [10] были введены классы Соболева с переменным показателем и исследованы некоторые вопросы теории приближения функций из этих классов. Следующий шаг в этом направлении был сделан в работе [11], в которой найдены необходимые и достаточные условия на переменный показатель $p(x)$, при соблюдении которых система Хаара

$\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L^{p(x)}([0,1])$, а именно, если $p(x) \geq 1$ $(x \in [0,1])$ и удовлетворяет на $[0,1]$ условию Дини − Липшица

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \leq C,$$

то система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом нормированного пространства $L^{p(x)}([0,1])$, причем это условие в определенном смысле окончательно. Эти исследования были продолжены в работе **[12]**, в которой доказано, что если 2π-периодический показатель $p(x) \geq 1$ $(x \in [0,2\pi])$ и удовлетворяет на $[0,2\pi]$ условию Дини − Липшица $|p(x) - p(y)| \ln \frac{2\pi}{|x-y|} \leq C$, то некоторые семейства операторов свертки равномерно ограничены в $L^{p(x)}([0,2\pi])$. Из этого результата, в частности, следует, что целый ряд классических линейных операторов таких, например, как средние Фейера, Абеля, Чезаро, Стеклова, могут быть рассмотрены как аппарат приближения в пространстве $L^{p(x)}([0,2\pi])$. Если же 2π-периодический переменный показатель удовлетворяет на $[0,2\pi]$ дополнительному условию $p_- = \min_{x\in[0,2\pi]} p(x) > 1$, то в работе **[13]** было показано, что тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in Z}$ является базисом пространства $L_{2\pi}^{p(x)} = L^{p(x)}([0,2\pi])$. Аналогичный результат для системы ортонормированных полиномов Лежандра $\{\hat{P}_n\}_{n\geq 0}$ в пространстве $L^{p(x)}([-1,1])$ установлен в работе **[14]**.

Таким образом, было показано, что многие традиционные вопросы теории приближений допускают обобщение на пространства $L^{p(x)}(E)$ в том случае, если переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет на E условию Дини − Липшица. Следует, однако, отметить, что до недавнего времени оставались не исследованными в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ те вопросы, которые связаны с получением прямых и обратных теорем теории приближений. Дело в том, что если $p(x)$ не совпадает с некоторой константой, то область определения оператора сдвига $f_h(x) = f(x+h)$ не охватывает всего пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$. Другими словами, из того, что $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, не обязательно следует, что $f_h(x) = f(x+h) \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Поэтому величина $\omega(f,\delta) = \sup ||f(*) - f(* +h)||_{p(\cdot)}([0,2\pi])$, традиционно используемая в качестве модуля непрерывности функций $f \in L_{2\pi}^{p}$, не может быть рассмотрена в качестве модуля непрерывности функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, если $p(x)$ не совпадает тождественно с некоторой константой. Это обстоятельство служило основным препятствием на пути переноса на пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$ прямых и обратных теорем теории приближений. Но недавно наметился прогресс и в этом направлении.

Во-первых, в уже упомянутой работе **[13]** для произвольного $\gamma > 0$ была рассмотрена величина

$$\Omega^{\gamma}(f,\delta)_{p(\cdot)} = \sup_{\substack{\tau,h,\\ 0\leq|\tau|^{\gamma}\leq h\leq\delta}} ||f - S_{h,\tau}(f)||_{p(\cdot)}, \tag{1.2}$$

где $S_{h,\tau}(f)$ − функция Стеклова вида

$$S_{h,\tau}(f) = \frac{1}{h}\int_{\tau}^{h+\tau} f(x+t)dt,$$

для которой доказано, что если $p(x) \geq 1$ $(x \in R)$ и удовлетворяет условию Дини − Липшица, то $\lim_{\delta\to 0}\Omega^{\gamma}(f,\delta) = 0$. Кроме того, из **(1.2)** следует, что $\Omega^{\gamma}(f,\delta)$ не убывает по δ и полуаддитивна по f. Поэтому $\Omega^{\gamma}(f,\delta)$ может быть рассмотрена в качестве модуля непрерывности для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ при любом $\gamma > 0$. Кроме того, если мы рассмотрим, например, величину

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0<h\leq\delta} ||f - S_h(f)||_{p(\cdot)}, \tag{1.3}$$

где $S_h(f) = S_{h,0}(f)$, то из **(1.2)** и **(1.3)** следует, что $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} \leq \Omega^1(f,\delta)_{p(\cdot)}$. Поэтому $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}$ также может рассматриваться в качестве модуля непрерывности $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$.

Во-вторых, мы можем отметить уже целый ряд работ **[15−18]**, в которых получены прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$ (и даже в более общих весовых аналогах пространств $L_{2\pi}^{p(x)}$) в том случае, когда $p_- = \min_{x\in R} p(x) > 1$ и $p(x)$ удовлетворяют на периоде $[0,2\pi]$ условию Дини − Липшица. В этих работах при конструировании модуля непрерывности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ также используются функции Стеклова того или иного типа. И тем не менее, задача о получении прямых и обратных теорем теории приближений в $L_{2\pi}^{p(x)}$, когда от переменного показателя вместо условия $p_- > 1$ требуется всего лишь $p_- \geq 1$, оставалась нерешенной. Дело здесь заключается в следующем. Если переменный

2π-периодический показатель $p(x) \geq p_- > 1$ $(x \in R)$ удовлетворяет на $[0,2\pi]$ условию Дини − Липшица, то, как уже отмечалось выше, тригонометрическая система является базисом в $L_{2\pi}^{p(x)}$ и, как следствие, частичные суммы Фурье $S_n(f,x)$ ряда Фурье функции f порядка n доставляют функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ приближение, совпадающее по порядку стремления к нулю с величиной наилучшего приближения $E_n(f)_{p(\cdot)}$ тригонометрическими полиномами. Поэтому в этом случае прямые теоремы теории приближений выводятся [15−18] путем изучения скорости сходимости к нулю величины $||f - S_n(f)||_{p(\cdot)}$. Что же касается случая, когда $p_- = \min\limits_{x \in R} p(x) = 1$, то тогда тригонометрическая система, вообще говоря, теряет свойство базисности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ и, как следствие, методы, использовавшиеся для доказательства прямых и обратных теорем теории приближений в $L_{2\pi}^{p(x)}$, в случае $p_- = 1$ уже не работают. Потребовалось найти новые подходы для решения этой задачи. В части, касающейся первой теоремы Джексона в $L_{2\pi}^{p(x)}$, эта проблема была решена с использованием модуля непрерывности (1.3) в работе автора [19]. В настоящей работе разработаны методы, которые позволяют доказать вторую теорему Джексона в $L_{2\pi}^{p(x)}$ в том случае, когда 2π-периодический переменный показатель $p(x)$, удовлетворяющий на периоде условию Дини − Липшица, может принимать значения, равные единице. Эти методы основываются на изучении аппроксимативных свойств средних Валле-Пуссена в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$ и, на наш взгляд, представляют самостоятельный научный интерес.

§ 2. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена в пространствах $L_{2\pi}^{p(x)}$

В пространстве $L_{2\pi}^{p(x)} = L^{p(x)}([0,2\pi])$ мы выделим классы дифференциируемых функций $W_{p(\cdot)}^r(M)$ типа Соболева, состоящие из 2π-периодических $r-1$ раз непрерывно-дифференцируемых функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютна непрерывна на $[0,2\pi]$ и $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет неравенству $||f^{(r)}||_{p(\cdot)} \leq M$. Положим $W_{p(\cdot)}^r = \bigcup_{M>0} W_{p(\cdot)}^r(M)$, $W_{p(\cdot)}^0 = L_{2\pi}^{p(x)}$. Для функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ мы можем рассмотреть ряд Фурье

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{2.1}$$

и частичную сумму ряда Фурье

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{2.2}$$

где

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Если $r \geq 1$, $p(x) \geq 1$ и $f \in W_{p(\cdot)}^r$, то, как хорошо известно [20, с. 75],

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) B_r(t-x) dt, \tag{2.3}$$

где

$$B_r(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ku + \frac{\pi r}{2})}{k^r} \tag{2.4}$$

− функция Бернулли. Поскольку $S_n^{(r)}(f,x) = S_n(f^{(r)},x)$, то из (2.3) и (2.4) мы выводим для $f \in W_{p(\cdot)}^r$ равенство

$$f(x) - S_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) R_{r,n}(t-x) dt, \tag{2.5}$$

где

$$R_{r,n}(u) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(ku + \frac{\pi r}{2})}{k^r}. \tag{2.6}$$

Мы определим средние Валле-Пуссена $V_m^n(f) = V_m^n(f,x)$ с помощью равенства

$$V_m^n(f) = V_m^n(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m} S_{n+l}(f,x). \qquad (2.7)$$

Сопоставляя равенства (2.5) и (2.6) с (2.7), мы замечаем, что

$$f(x) - V_m^n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m} R_{r,n+l}(t-x)dt. \qquad (2.8)$$

Положим

$$\kappa_{r,m+1}^n(u) = (m+1)^{r-1}\sum_{l=0}^{m} R_{r,n+l}(u) \qquad (2.9)$$

и перепишем (2.8) так:

$$f(x) - V_m^n(f,x) = \frac{1}{\pi(m+1)^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\kappa_{r,m+1}^n(t-x)dt. \qquad (2.10)$$

Из (2.9) следует, что функция $\kappa_{r,m+1}^n(x)$ ортогональна ко всем тригонометрическим полиномам степени n, поэтому из (2.10) имеем

$$f(x) - V_m^n(f,x) = \frac{1}{\pi(m+1)^r}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f^{(r)}(t) - T_n(t)\right)\kappa_{r,m+1}^n(t-x)dt, \qquad (2.11)$$

где $T_n(t)$ – произвольный тригонометрический полином порядка n. Чтобы сформулировать основной результат данного параграфа, нам понадобятся некоторые обозначения. Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим класс 2π-периодических переменных показателей $p = p(x)$ таких, что:

1) $p(x) \geq 1$ для всех $x \in R$;
2) $p(x)$ удовлетворяет для $x, y \in [0,2\pi]$ условию Дини – Липшица

$$|p(x) - p(y)|\ln\frac{2\pi}{|x-y|} = O(1).$$

Пусть $E_n(f)_{p(\cdot)} = \inf_{T_n}||f - T_n||_{p(\cdot)}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами порядка n. Через $c(\alpha, \delta, \dots \gamma)$ мы будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров. Основной результат, полученный в настоящей работе, заключается в следующем.

Теорема 2.1. *Пусть $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $r \geq 1$, $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$. Тогда имеют место следующие оценки*

$$||f - V_{n-1}^n(f)||_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^r}E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}, \qquad (2.12)$$

$$||f - V_n^n(f)||_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^r}E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}. \qquad (2.13)$$

Замечание. Оценки, аналогичные (2.12) и (2.13), можно получить и для общих операторов Валле-Пуссена $V_m^n(f)$ при условии $n \asymp m$, но в настоящей работе мы на этом не будем останавливаться.

Доказательство теоремы 2.1 базируется на ряде вспомогательных утверждений, касающихся свойств последовательности функций (ядер) $\kappa_{r,m+1}^n(u)$ $(n = 1,2,\dots)$, определенных равенством (2.9).

Лемма 2.1. *Имеют место следующие равенства*

$$\kappa_{2s,n}^n(u) = (-1)^s n^{2s-1}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{l+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u\cos(2n+k+l+2)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta^2 g_s(n+1+k+l) +$$
$$(-1)^{s-1}n^{2s-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u\cos(3n+k+1)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta q_s(2n+k), \qquad (2.14)$$

$$\kappa_{2s-1,n}^n(u) = (-1)^s n^{2s-2}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{l+1}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u\cos(2n+k+l+2)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta^2 g_s(n+1+k+l) +$$
$$(-1)^{s-1}n^{2s-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u\cos(3n+k+1)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta q_s(2n+k),$$

где $g_s(t) = t^{-2s}$, $q_s(t) = t^{-2s+1}$, $\Delta\varphi(t) = \varphi(t+1) - \varphi(t)$, $\Delta^2\varphi(t) = \varphi(t+2) - 2\varphi(t+1) + \varphi(t)$.

Доказательство. Из (2.6) и (2.9) имеем

$$\kappa_{r,m+1}^n(u) = (m+1)^{r-1} \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(n+k+l+1)u + \frac{\pi r}{2}\right]}{(n+k+l+1)^r},$$

откуда, воспользовавшись преобразованием Абеля, мы можем записать

$$\kappa_{r,m+1}^n(u) = (m+1)^{r-1} \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1+k+l)^r} - \frac{1}{(n+2+k+l)^r}\right] v_{k,l}^n(u), \tag{2.16}$$

где

$$v_{k,l}^n(u) = \sum_{j=0}^{k} \cos\left[(n+1+l+j)u + \frac{\pi r}{2}\right]. \tag{2.17}$$

Мы остановимся на случае, когда $m = n-1$, и рассмотрим относительно r два случая, в зависимости от четности или нечетности r. Если $r = 2s$, то $\cos(\mu u + \frac{\pi r}{2}) = (-1)^s \cos\mu u$, стало быть, (2.17) принимает следующий вид:

$$v_{k,l}^n(u) = (-1)^s \sum_{j=0}^{k} \cos(n+1+l+j)u =$$

$$= (-1)^s \cdot \frac{\sin(2(n+1+l+k)+1)\frac{u}{2} - \sin(2(n+l)+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{2.18}$$

Из (2.16) и (2.18) имеем

$$\kappa_{2s,n}^n(u) = (-1)^{s-1} n^{2s-1} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \Delta g_s(n+1+k+l) \frac{\sin(2(n+1+l+k)+1)\frac{u}{2} - \sin(2(n+l)+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{2.19}$$

К внутренней сумме мы применим снова преобразование Абеля, тогда из (2.19) получим

$$\kappa_{2s,n}^n(u) = (-1)^{s-1} n^{2s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-2} \Delta g_s(n+1+k+l) \frac{W_{k,l}^n(u) - W_{0,l}^n(u)}{2\sin\frac{u}{2}} +$$

$$(-1)^{s-1} n^{2s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta g_s(2n+k) \frac{W_{k,n-1}^n(u) - W_{0,n-1}^n(u)}{2\sin\frac{u}{2}}, \tag{2.20}$$

где

$$W_{k,l}^n(u) = \sum_{\mu=0}^{l} \sin(2(n+1+\mu+k)+1)\frac{u}{2} = \frac{\sin^2(n+l+k+2)\frac{u}{2} - \sin^2(n+k+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\sin(n+l+k+2)\frac{u}{2} - \sin(n+k+1)\frac{u}{2}\right)\left(\sin(n+l+k+2)\frac{u}{2} + \sin(n+k+1)\frac{u}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\sin\frac{u}{2}} \sin\frac{l+1}{4}u \cdot \cos\left(n+k+1+\frac{l+1}{2}\right)\frac{u}{2} \cdot \sin\left(n+k+1+\frac{l+1}{2}\right)\frac{u}{2}\cos\frac{l+1}{4}\frac{u}{2}. \tag{2.21}$$

Поскольку, в силу (2.21)

$$W_{k,l}^n(u) - W_{0,l}^n(u) = \frac{4}{\sin\frac{u}{2}} \sin\frac{l+1}{2}\cos\frac{l+1}{2}\Big(\sin(n+k+1+\frac{l+1}{2})\frac{u}{2}\cos(n+k+1+\frac{l+1}{2})\frac{u}{2} -$$

$$\sin(n+\frac{l+1}{2})\frac{u}{2}\cos(n+\frac{l+1}{2})\frac{u}{2}\Big) = \frac{\sin\frac{l+1}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\left(\sin(2(n+k+1)+l+1)\frac{u}{2} - \sin(2n+l+1)\frac{u}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sin\frac{u}{2}} \sin\frac{l+1}{2}u \sin\frac{k+1}{2}u \cos(2n+k+l+2)\frac{u}{2}, \tag{2.22}$$

то равенство (2.14) вытекает из (2.20) и (2.22). Равенство (2.15) доказывается совершенно аналогично. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $0 \le k \le l$. *Тогда*

$$A_{k,l} = \int_0^{\pi} \frac{|\sin\frac{k+1}{2}u\sin\frac{l+1}{2}u|}{\sin\frac{u}{2}} du \le 2(k+1)(2+\ln\frac{l+1}{k+1}) + \frac{\pi}{3-\frac{\pi^2}{8}}.$$

Доказательство. Имеем

$$A_{k,l} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(k+1)u\sin(l+1)u|}{\sin^2 u} du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(k+1)u\sin(l+1)u|}{u^2} du +$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(k+1)u\sin(l+1)u|\varphi(u)du, \qquad (2.23)$$

где

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{1}{u^2} = \frac{u^2 - \sin^2 u}{u^2\sin^2 u}.$$

Пусть $0 < u < \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\varphi(u) = \frac{(u+\sin u)(u-\sin u)}{u^2\sin^2 u} = \frac{(2u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots)(\frac{u^3}{3!} - \frac{u^5}{5!} + \cdots)}{u^2\sin^2 u} =$$

$$\frac{(2 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \cdots)(\frac{1}{3!} - \frac{u^2}{5!} + \cdots)}{\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2} = \frac{(2 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \cdots)(\frac{1}{3!} - \frac{u^2}{5!} + \cdots)}{(1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \cdots)^2} < \frac{\frac{2}{3!}}{\left(1 - \frac{u^2}{3!}\right)^2} = \frac{1}{3(1 - \frac{\pi^2}{24})} = \frac{1}{3 - \frac{\pi^2}{8}}$$

и, поэтому,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(k+1)u\sin(l+1)u|\varphi(u)du \le \frac{\pi}{3 - \frac{\pi^2}{8}}. \qquad (2.24)$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(k+1)u\sin(l+1)u|}{u^2} du = (k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}(k+1)} \frac{|\sin u\sin\frac{l+1}{k+1}u|}{u^2} du \le$$

$$(k+1)\int_0^1 \frac{\left|\sin\frac{l+1}{k+1}u\right|}{u} du + (k+1)\int_1^{\frac{\pi}{2}(k+1)} \frac{du}{u^2} < (k+1)\int_0^{\frac{l+1}{k+1}} \frac{|\sin u|}{u} du + (k+1) <$$

$$(k+1)\left[\int_0^1 \frac{\sin u}{u} du + \int_1^{\frac{l+1}{k+1}} \frac{du}{u} + 1\right] < (k+1)\left(2 + \ln\frac{l+1}{k+1}\right). \qquad (2.25)$$

Утверждение леммы вытекает из равенства (2.23) и неравенств (2.24) и (2.25).

Лемма 2.3. *При* $r \ge 1$ *имеет место неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\kappa_{r,n}^n| du \le c(r).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай четного $r = 2s$. Тогда из леммы 2.1 имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\kappa_{2s,n}^n| du \le n^{2s-1} \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 g_s(n+1+k+l) \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin\frac{k+1}{2}u\sin\frac{l+1}{2}u|}{\sin^2\frac{u}{2}} du +$$

$$n^{2s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta q_s(2n+k) \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\frac{n}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u\right|}{\sin^2\frac{u}{2}} du. \qquad (2.26)$$

В силу леммы 2.2

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin\frac{k+1}{2}u\sin\frac{l+1}{2}u|}{\sin^2\frac{u}{2}}du \le \begin{cases} 2(k+1)(2+\ln\frac{l+1}{k+1})+\frac{\pi}{3-\frac{\pi^2}{8}}, k\le l \\ 2(l+1)(2+\ln\frac{k+1}{l+1})+\frac{\pi}{3-\frac{\pi^2}{8}}, l<k. \end{cases} \tag{2.27}$$

Далее, поскольку, $\Delta^2 g_s(t) = g_s''(\bar{t})$ $(t \le \bar{t} \le t+2)$, то

$$\Delta^2 g_s(n+1+k+l) = g_s''(\bar{t}) = \frac{2s(2s+1)}{\bar{t}^{2s+2}} \le \frac{2s(2s+1)}{(n+1+k+l)^{2s+2}}, \tag{2.28}$$

где $n+1+k+l<\bar{t}<n+1+k+l+2$ и, аналогично,

$$\Delta g_s(2n+k) \le \frac{2s}{(2n+k)^{2s+1}}. \tag{2.29}$$

Из (2.27) и (2.28) имеем $(l \le n-2)$

$$\sum_{k=l}^{\infty}\Delta^2 g_s(n+1+k+l)\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{k+1}{2}u\sin\frac{l+1}{2}u\right|}{\sin^2\frac{u}{2}}du \le \sum_{k=l}^{\infty}\frac{4s(2s+1)\left[(l+1)\left(2+\ln\frac{k+1}{l+1}\right)+\frac{\pi}{3-\frac{\pi^2}{8}}\right]}{(n+1+k+l)^{2s+2}} \le$$

$$\sum_{k=l}^{\infty}\frac{4s(2s+1)\left[2(l+1)+k-l+\frac{\pi}{3-\frac{\pi^2}{8}}\right]}{(n+1+k+l)^{2s+2}} \le c(s)n^{-2s}, \tag{2.30}$$

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{2s(2s+1)[(k+1)(2+\ln\frac{l+1}{k+1})+\frac{\pi}{3-\frac{\pi^2}{8}}]}{(n+1+k+l)^{2s+2}} \le c(s)n^{-2s}, \tag{2.31}$$

поэтому

$$n^{2s-1}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^2 g_s(n+1+k+l)\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin\frac{k+1}{2}u\sin\frac{l+1}{2}u|}{\sin^2\frac{u}{2}}du \le c(s)n^{2s-1}\sum_{l=0}^{n-2}n^{-2s} \le c(s). \tag{2.32}$$

Далее, из (2.27) и (2.29) имеем

$$n^{2s-1}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta g_s(2n+k)\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin\frac{n}{2}u\sin\frac{k+1}{2}u|}{\sin^2\frac{u}{2}}du \le n^{2s-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{4s\left[(k+1)(2+\ln\frac{n}{k+1})+\frac{\pi}{3+\frac{\pi^2}{8}}\right]}{(2n+k)^{2s+1}}+$$

$$n^{2s-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4s\left[n(\ln\frac{k+1}{n}+2)+\frac{\pi}{3+\frac{\pi^2}{8}}\right]}{(2n+k)^{2s+1}} \le c_1(s)+n^{2s-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4s(2n+\frac{\pi}{3+\frac{\pi^2}{8}})}{(2n+k)^{2s+1}}+n^{2s-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4sn\ln\frac{k+1}{n}}{(2n+k)^{2s+1}}$$

$$\le$$

$$c_1(s)+c_2(s)n^{2s}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{k-n+1}{n}\right)}{(2n+k)^{2s+1}} = c_1(s)+c_2(s)n^{2s}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{j}{n}\right)}{(3n-1+j)^{2s+1}} =$$

$$c(s)+\frac{c(s)}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{j}{n})}{(3-\frac{1}{n}+\frac{j}{n})^{2s+1}} \le c(s)\left(1+\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(1+x)\,dx}{(2+x)^{2s+1}}\right) \le c(s). \tag{2.33}$$

Сопоставляя (2.32) и (2.33) с (2.26), приходим к утверждению леммы (2.3) для четного $r \ge 1$. Совершенно аналогично доказывается лемма (2.3) и в случае нечетного $r=2s-1$.

Лемма 2.4. *Для* $n^{-\frac{1}{2}} \le u \le 2\pi - n^{-\frac{1}{2}}$ *имеет место неравенство*

$$|\kappa_{r,n}^{n}(u)| \le c(r).$$

Доказательство. Если $n^{-\frac{1}{2}} \le u \le 2\pi - n^{-\frac{1}{2}}$, то $\frac{1}{\sin^2\frac{u}{2}} \le \frac{\pi^2}{4}n$ и, поэтому из леммы 2.1 и неравенств (2.28) и (2.29) имеем

$$|\kappa_{2s,n}^n(u)| \le c(s)n^{2s}\left(\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1+k+l)^{2s+2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+k)^{2s+1}}\right) \le c(s)$$

и, аналогично, $|\kappa_{2s-1}^n(u)| \le c(s)$. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. *Имеет место оценка*

$$\max_u|\kappa_{r,n}^n(u)| \le c(r)n \quad (n = 1,2,\dots).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $r = 1$. Тогда из (2.6) имеем $(0 \le u \le 2\pi)$

$$R_{1,n}(u) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin ku}{k} = \frac{\pi - u}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin ku}{k}. \tag{2.34}$$

Хорошо известно [20, с. 105], что

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin ku}{k}\right| \le c \quad (n = 1,2,\dots),$$

поэтому из (2.34) следует оценка

$$R_{1,n}(u) \le c(r). \tag{2.35}$$

Если же $r \ge 2$, то из (2.6) следует, что

$$\left|R_{r,n}(u)\right| \le \frac{c(r)}{n^{r-1}}. \tag{2.36}$$

Утверждение леммы 2.5 следует из (2.9), (2.35) и (2.36).

Далее нам понадобится один результат, установленный в работе автора [12]. Пусть для каждого $\lambda \ge 1$ задана измеримая 2π-периодическая существенно ограниченная функция (ядро) $\kappa_\lambda = \kappa_\lambda(x)$. Тогда можно определить линейный оператор

$$\mathcal{K}_\lambda(f) = \mathcal{K}_\lambda(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\kappa_\lambda(t-x)dt, \tag{2.37}$$

действующий в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$. Будем говорить, что семейство ядер $\{\kappa_\lambda(x)\}_{1\le\lambda<\infty}$ удовлетворяет соответственно условиям A), B) и C), если имеют место следующие оценки:

$$A)\quad \int_{-\pi}^{\pi}|\kappa_\lambda(t)|dt \le c_1,$$

$$B)\quad \sup_x|\kappa_\lambda(x)| \le c_2\lambda^v,$$

$$C)\quad |\kappa_\lambda(x)| \le c_3 \text{ при } \lambda^{-\gamma} \le |x| \le \pi,$$

где $v, \gamma, c_j > 0$ и не зависят от λ. В [12] доказана следующая

Теорема I. *Пусть* $\kappa_\lambda = \kappa_\lambda(x)$ $(1 \le \lambda < \infty)$ *удовлетворяют условиям* $A)$–$C)$. *Тогда, если* $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, *то семейство операторов свертки* $\{\mathcal{K}_\lambda(f)\}_{\lambda\ge1}$, *определенных равенством (2.37), равномерно ограничено в* $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Теперь мы можем сформулировать еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2.6. *Пусть* $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$,

$$\mathcal{K}_n(f) = \mathcal{K}_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\kappa_{r,n}^n(t-x)dt, \quad (n = 1,2,\dots). \tag{2.38}$$

Тогда имеет место оценка

$$||\mathcal{K}_n(f)||_{p(\cdot)} \le c_r(p)||f||_{p(\cdot)}.$$

Справедливость утверждения этой леммы непосредственно вытекает из теоремы I, так как в силу лемм 2.3–2.5 семейство ядер $\kappa_{r,n}^n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ удовлетворяет условиям $A)$–$C)$.

Вернемся к доказательству теоремы 2.1. Из равенства (2.11) и леммы 2.6 имеем

$$||f - V_{n-1}^n(f)||_{p(\cdot)} \le \frac{c_r(p)}{n^r}||f^{(r)} - T_n||_{p(\cdot)}, \tag{2.39}$$

где $T_n = T_n(x)$ – произвольный тригонометрический полином порядка n. Оценка (2.12) вытекает из (2.39). Что же касается оценки (2.13), то она доказывается совершенно аналогично. Теорема 2.1 доказана.

Теперь обратимся к работе [19], в которой установлена следующая

Теорема J. *Пусть* $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$. *Тогда имеет место следующая оценка*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq c(p)\Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot)}.$$

Теорема J и теорема 2.1, взятые вместе, позволяют сформулировать

Следствие 2.1. *Пусть* $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $r \geq 1$, $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$. *Тогда имеют место следующие оценки*

$$||f - V_{n-1}^n(f)||_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^r}\Omega(f^{(r)}, \frac{1}{n})_{p(\cdot)}, \tag{2.40}$$

$$||f - V_n^n(f)||_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n^r}\Omega(f^{(r)}, \frac{1}{n})_{p(\cdot)}. \tag{2.41}$$

Следствие 2.2. *Пусть* $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $r \geq 0$, $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$. *Тогда имеет место следующая оценка* ($m = 1,2, \dots$)

$$E_m(f)_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{m^r}\Omega(f^{(r)}, \frac{2}{m})_{p(\cdot)}. \tag{2.42}$$

Доказательство. Если $m = 2n$, то оценка (2.42) вытекает из (2.40), если же $m = 2n - 1$, то (2.42) вытекает из (2.41). Следствие 2.2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И.И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26. Вып. 4. С. 613–632.

2. *Zhikov V.V.* Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory // Math. USSR Izv. 1987. Vol. 29. N 1. P. 33–66. [Translation of Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1986. Vol. 50. N 4. P. 675–710.]

3. *Zhikov V.V.* Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system// Differ. Equ. 1997. Vol. 33. N 1. P. 108–115. [Translation of Differ. Uravn. 1997. Vol. 33. N 1. P. 107–114.]

4. *Zhikov V.V.* On some variational problems // Russian J. Math. Phys. 1997. Vol. 5. N 1. P. 105–116.

5. *Diening L.* Maximal function on generalized Lebesgue spaces Lp(·). Math. Inequal. Appl. 2004. N 7. P. 245–253.

6. *Diening L. and Ružička M.* Calderon-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid dynamics // J. Reine Angew. Math. 2003. N 563. P. 197–220.

7. *Diening L., Hästö P. and Nekvinda A.* Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Proceedings of the Conference held in Milovy, Bohemian-Moravian Uplands, May 28 – June 2, 2004. Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republick, Praha.

8. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents // Lecture Notes in Mathematics 2017. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2011.

9. *Tsenov I. V.* Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s // (Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ. 1961. N 7. P. 25–37.

10. *Шарапудинов И.И.* Приближение функций в метрике пространства $L^{p(x)}([a,b])$ и квадратурные формулы // Constructive function theory'81. Procedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna, June 1–5, 1981. С. 189–193.

11. *Шарапудинов И.И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Матем. сборник. 1986. Т. 130(172). № 2(6). С. 275–283.

12. *Шарапудинов И.И.* О равномерной ограниченности в L^p $(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Матем. заметки. 1996. Т. 59. Вып. 2. С. 291–302.

13. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^p(x)$ // Analysis Mathematica. 2007. Т. 33. № 2. С. 135–153.

14. *Шарапудинов И.И.* О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве $L^{p(x)}(-1,1)$ переменным показателем $p(x)$ // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 1. С. 137–160.

15. *Guven A. and Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // Journal of Mathematical Inequalities. 2010. Vol 4. N 2. P. 285–299.

16. *Akgun R.* Polynomial approximation of function in weigted Lebesgue and Smirnov spaces whith nonstandard growth // Georgian Math. J. 2011. N 18. P. 203–235.

17. *Akgun R.* Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces whith variable exponent // Ukrainian Mathematical Journal. 2011. Vol. 63. N 1. P. 3–23.

18. *Akgun R. and Kokilashvili V.* On converse theorems of trigonometric approximation in weigted variable exponent Lebesgue spaces // Banach J. Math. Anal. 2011. Vol. 5. N 1. P. 70–82.

19. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Математический форум. 2011. Т. 5. Исследования по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. Владикавказ, 2011. С. 108–117.

20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир. 1965. С. 616.

Поступила в редакцию 19.05.2012 г.
Принята к печати 26.06.2012 г.