# ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

## МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.518.886

# О НЕРАВЕНСТВАХ П.Л. ЧЕБЫШЕВА В ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

**А. Я. Якубов, Я. А. Якубов**

Чеченский государственный университет
Дагестанский филиал ОАО «РусГидро»

В статье доказывается критерий справедливости неравенств Чебышева в общем линейном пространстве со скалярным произведением. При этом критерий справедливости интегральных неравенств Чебышева в классе произвольных измеримых на некотором $n$ -мерном брусе $\Omega_{a,b} \subset \mathbf{R}^n$ функций, а также их дискретные аналоги являются следствиями полученных здесь общих результатов.

It is proved criterion for the validity of the Chebyshev inequality in the general linear space with an inner product. The criterion validity of the Chebyshev integral inequalities in the class of arbitrary measurable on some $n$ -dimensional rod $\Omega_{a,b} \subset \mathbf{R}^n$ functions as well as their discrete counterparts are consequences of the general results obtained here.

Ключевые слова: неравенства Чебышева; обобщения неравенств Чебышева; интегральные неравенства.

Keywords: direct Chebyshev inequalities; inverse Chebyshev inequalities; integral synchronism.

**Введение**

Как известно, неравенства играют важную роль во многих областях математики и ее приложений. В частности, в теории нелинейных интегральных уравнений особую ценность представляют интегральные неравенства Чебышева.

В 1882 г. в статье [2] и в 1883 г. в статье [3], посвященных оценкам остаточного члена $R_n$ в обобщенной формуле Парсеваля:

$$\int_a^b uv\theta dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\int_a^b u\psi_k\theta dx \int_a^b v\psi_k\theta dx}{\int_a^b \psi_k^2 \theta dx} + R_n \tag{1}$$

где $\theta$ – некоторая положительная на $[a,b]$ функция, $\psi_0, \psi_1, \dots$ – ортонормированные с весом полиномы, П.Л. Чебышев установил, что для функций $u, v \in C^n[a,b]$ – остаточный член $R_n$ удовлетворяет условиям:

$$(A) \qquad |R_n| \le \frac{\int \psi_n^2 dx}{\left(\frac{d^n\psi_n(0)}{dx^n}\right)^2} \cdot \max_{a \le x \le b}\left|\frac{d^n u(x)}{dx^n}\right| \cdot \max_{a \le x \le b}\left|\frac{d^n v(x)}{dx^n}\right|$$

Если в пределах от $a$ до $b$ производные $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ не меняют своего знака, то

$$(B) \qquad sgnR_n = sgn\left(\frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{d^n v}{dx^n}\right).$$

При $n = 1$, имеем $\psi_0 = 1$ и

$$\int_a^b uv\theta dx = \frac{\int_a^b u\theta dx \cdot \int_a^b v\theta dx}{\int_a^b \theta dx} + R_1. \tag{2}$$

Если обе функции $u$ и $v$ возрастают или обе убывают, то из (2), в силу свойства (B), имеем неравенство Чебышева

$$\int_a^b uv\theta dx > \frac{\int_a^b u\theta dx \cdot \int_a^b v\theta dx}{\int_a^b \theta dx}, \quad \text{и} \quad ' < '. \tag{3}$$

если одна возрастает, другая убывает.

Заметим, что в неравенствах Чебышева сравниваются взвешенные средние величины функций $u$ и $v$ и их произведения.

Неравенства Чебышева обратили на себя особое внимание многих математиков. Им посвящены сотни научных публикаций. Только за последние годы, по данным AMS (Американского математического общества), опубликовано более 70 работ.

Такое пристальное внимание к неравенствам Чебышева вызвано их многочисленными приложениями. Поэтому актуален вопрос: «Для каких еще классов функций, кроме монотонных, справедливы неравенства Чебышева?». Возникла естественная проблема: «Описать все измеримые функции, для которых справедливы неравенства Чебышева».

В связи с этой проблемой следует отметить работы Андреева, Коркина, Сонина, Поссе и ряда других авторов, которые уже к 1883 г. значительно расширили класс функций, для которых справедливы неравенства Чебышева (см. [2, 4, 5, 7, 10, 12]).

Тем не менее вопрос описания всех измеримых функций, для которых справедливы неравенства Чебышева, оставался открытым, за исключением некоторых специальных классов функций, рассмотренных в работах, например, H. Heining и L. Maligranda (1993/1994), T.E. Armstrong (1993/1994), S.S. Dragomir и B. Crstici (1999), Х. Гаучман (2003), Ч. Пирь, И. Печарич и Я. Шунде (2006), Z. Otachel (2009), J.S. Caballero (2010), C.P. Niculescu и J. Pecric (2010), А.Я. Якубов, Я.А. Якубов (1989–2011) и др.

**§ 1. Постановка задачи**

В данной работе мы получаем критерии справедливости неравенств Чебышева в произвольных линейных пространствах со скалярным произведением, при этом критерии в конкретных линейных пространствах получаются как частные случаи.

Мы будем рассматривать взвешенные средние величины с системой весов $p > 0$. Обыкновенные средние величины можно рассматривать как взвешенные средние величины, когда веса $p = 1$. Поэтому мы в наших формулах не будем явно указывать веса, но будем всегда подразумевать, что средние, которые сравниваются друг с другом, образованы с одинаковой системой весов.

Из равенства (2), установленного Чебышевым, при $n = 1$, полагая $\int \theta dx = 1$ (что всегда возможно), имеем:

$$\int_a^b uv\theta dx - \int_a^b u\theta dx \int_a^b v\theta dx = R_1, \ |R_1| \le \gamma \max_{a \le x \le b} \left|\frac{du}{dx}\right| \max_{a \le x \le b} \left|\frac{dv}{dx}\right|, \ \gamma > 0 \tag{4}$$

Очевидно, соотношения (4) решают вариационные задачи, что устанавливает степень точности (неулучшаемости) неравенств Чебышева в классе дифференцируемых функций $C^1([a,b])$.

Точность, неулучшаемость неравенств Чебышева в рамках заданных ограничений – одна из главных фундаментальных характерных свойств неравенств Чебышева.

Из свойства (B), установленного Чебышевым, следует, что знак неравенств Чебышева на интервале $(a,b)$ и на всех подмножествах интервала $(a,b)$ должен быть один и тот же. Это свойство мы называем свойством устойчивости неравенств Чебышева. Это вторая из главных фундаментальных характеристик неравенств Чебышева. Эти свойства и влекут неравенства Чебышева.

## § 2. Основные результаты

Пусть $E$ – непустое множество. Обозначим через $S(E)$ алгебру с конусом всех действительных элементов, определенных на $E$, в которой для любых двух элементов $x$ и $y$ из $S(E)$ определено скалярное произведение.

Пусть $e$ – единичный элемент пространства $S(E)$ и $p \in S(E)$, $p > 0$ – заданный положительный элемент $S(E)$. Тогда величины $(px, py) = (x, y)$, $(px, e) = (x, e)$, $(py, e) = (y, e)$ имеют смысл для любых элементов $x, y \in S(E)$.

Так как в пространстве со скалярным произведением скалярный квадрат неотрицателен: $(x, x) \geq 0$ для любого $x \in S(E)$ и

$$(xu + yv, xu + yu) = (x, x)u^2 + 2(x, y)uv + (y, y)v^2 = \varphi(u, v), \tag{5}$$

то неотрицательность квадратичной формы (5) $(\varphi(u, v))$ задает неравенство Коши

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y). \tag{6}$$

справедливое для всех элементов $x, y$ из $S(E)$ (см., например, Харди, Литтлвуд, Пойа. Неравенства, 1934; Беллман, Беккенбах. Неравенства, 1965 и др.).

В случае же неравенств Чебышева ситуация намного сложнее. Совершенно очевидно, что неравенства Чебышева не выполняются для любых элементов $x, y$ из $S(E)$, иначе нечего было бы и доказывать.

Однако для некоторых подклассов элементов из $S(E)$ неравенства Чебышева выполняются. Например, для подклассов монотонных элементов, дифференцируемых элементов из $C^{'}$, включающих класс монотонных элементов, для подкласса синхронных элементов и т.д. Каждый последующий из перечисленных классов включает в себя все предыдущие.

Задача заключается в том, чтобы выделить (описать) максимальный подкласс элементов пространства $S(E)$ такой, чтобы любые элементы этого подкласса удовлетворяли неравенствам Чебышева и никакие другие элементы, не входящие в этот подкласс, не удовлетворяли бы неравенствам Чебышева, т.е. получить критерий справедливости неравенства Чебышева. Кроме того, всегда предполагается, называя неравенства неравенствами Чебышева, выполненными условия (A) и (B).

Для решения этой задачи мы вводим квадратичную форму специального вида, которая выделяет в общем линейном пространстве $S(E)$ со скалярным произведением максимальный подкл $S(E)$ элементов из , для которых справедливы неравенства Чебышева:

**Определение 1.** *Будем говорить, что элементы* $x$ *и* $y$ *из* $S(E)$ *скалярно синхронны на множестве* $E$*, если квадратичная форма*

$$\psi(h) = (x, y)u^2 - 2|(x, e)(y, e)|uv + (x, y)v^2. \tag{7}$$

$h = h(u, v) \in \mathbb{R}^2$, *является устойчиво на* $E$ *неотрицательно определенной для всех нетривиальных* $h\left(h(u,v) \neq h(0,0)\right)$ *и скалярно антисинхронными на* $E$*, если квадратичная форма*

$$\overline{\psi(h)} = (x, e)(y, e)u^2 - 2|x, y|uv + (x, e)(y, e)v^2$$

*является устойчиво на E неотрицательно определенной для всех нетривиальных* $h\left(h(u,v) \neq h(0,0)\right)$

Для удобства неравенства вида а) $(x, y) - \left|(x, e)(y, e)\right| \geq 0$ или $(x, y) \geq |(x, e)(y, e)|$ будем называть *прямыми неравенствами Чебышева*, а неравенства вида б) $|x, y| - (x, e)(y, e) \leq 0$ или $|\sigma(fg)| \leq \sigma(f)\sigma(g)$ будем называть *обратными неравенствами Чебышева*. Эти понятия не ущемляют общности, а наоборот, охватывают случаи разных знаков, и отпадает необходимость различать множество случаев.

Основной результат работы – доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Для того чтобы элементы* $x, y S(E)$ *из удовлетворяли на* $E$ *прямым (соответственно обратным) неравенствам Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы элементы* $x$ *и* $y$ *были скалярно синхронны (соотвественно антисинхронны) на множестве* $E$ .

*Доказательство.* Случаи устойчивого равенства в неравенствах Чебышева мы рассмотрим отдельно.

Прямые неравенства Чебышева.

**Достаточность.** В силу сделанного соглашения квадратичная форма (7) является положительно определенной. В случае общих линейных пространств со скалярным произведением для установления свойств типа (А) и (В) мы воспользуемся свойствами собственных чисел формы вместо остаточного члена $\mathbf{R_1}$ и соответствующих собственных элементов формы (7).

Рассмотрим пучок форм $h'Mh - \lambda h'Eh \equiv M(h,h) - \lambda E(h,h)$ , где

$$M = \begin{pmatrix} (x,y) & -|(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})| \\ -|(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})| & (x,y) \end{pmatrix}$$

– матрица формы,

$$\boldsymbol{h}(u,v) = \binom{u}{v}, \quad \boldsymbol{h}' = (u,v), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, пучок регулярен и положителен. Характеристическое уравнение пучка

$$|M - \lambda E| = 0$$

имеет два корня:

$$\lambda_1 = (x,y) - \left|(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})\right|, \; \lambda_2 = (x,y) + \left|(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})\right|.$$

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2$$

очевидно.

Эти корни являются собственными числами квадратичной формы (7). Наименьшим характеристическим числом пучка является $\lambda_1 > 0$ (наименьшее собственное число формы). Ему соответствует собственный (главный) элемент $\boldsymbol{h} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Как известно, наименьшее характеристическое число регулярного пучка $M(h,h) - \lambda E(h,h)$ является минимумом отношения форм $M(h,h)$ и $E(h,h)$, (вместо ограничений (А)), так что

$$\lambda_1 = \min_{\boldsymbol{h}} \frac{M(h,h)}{E(h,h)}$$

причем этот минимум достигается только на элементах, являющихся главными для характеристического числа $\lambda_1$, следовательно, точным неулучшаемым минимумом, и дает прямые неравенства Чебышева:

$$(x,y) - |(x,\boldsymbol{e}) \cdot (y,\boldsymbol{e})| = \lambda_1 > 0 \text{ или } (x,y) > |(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})|$$

которые неулучшаемы.

**Необходимость.**

Пусть устойчиво на $E$ выполнено прямое неравенство Чебышева

$$(x,y) > |(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})| \tag{8}$$

Из (8) получаем, что

$$(x,y) > 0, \; (x,y) - |(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})| > 0, \; (x,y) + |(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})| > 0 \tag{9}$$

и

$$\Delta = [(x,y)]^2 - [|(x,\boldsymbol{e})(y,\boldsymbol{e})|]^2 > 0 . \tag{10}$$

Составим квадратичную форму

$$\psi^{*}(h) = (x,y)u^2 - 2\left|(x,e)(y,e)\right|uv + (x,y)v^2 . \quad (11)$$

Из неравенств (9) с учетом (10) имеем, что квадратичная форма $\psi^{*}(h)$ является устойчиво на $E$ положительно определенной. Значит элементы $x$ и $y$ из $S(E)$, в силу определения 1, скалярно синхронны.

Обратные неравенства Чебышева доказываются по той же схеме.

Мы будем говорить «неравенства Чебышева», имея в виду любое из неравенств а) или б).

Будем называть подкласс элементов из $S(E)$, для которых и только для которых справедливы неравенства Чебышева, классом синхронности и обозначать $IS(E) \subset S(E)$. Таким образом, для любой пары элементов $x$ и $y$ из $IS(E)$ неравенства Чебышева выполняются и ни для каких элементов, не принадлежащих $IS(E)$, неравенства Чебышева не выполняются, т.е. мы даем описание всех тех и только тех элементов из общего линейного пространства $S(E)$, для которых справедливы неравенства Чебышева.

Из полученных результатов следует, что мы даем общее правило, которое позволяет получать большое количество различных критериев справедливости неравенств Чебышева, выбирая линейные пространства $S$ и скалярные произведения в них.

1. Полагая $S(E) = L^2(\Omega_{a,b})$, где $E = \Omega_{a,b} = [a,b].n$ – мерный брус в $\mathbf{R}^n$ и полагая $x = f, y = g;\ p,f,g \in L^2(\Omega_{a,b}), p > 0$, будем иметь

$$(f,g) = \sigma(f,g) = \frac{\int_a^b pfg\,dt}{\int_a^b p\,dt}, \sigma(f) = \frac{\int_a^b pf\,dt}{\int_a^b p\,dt} = (f,e), \sigma(g) = \frac{\int_a^b pg\,dt}{\int_a^b p\,dt} = (g,e)$$

и с учетом, что $\int_a^b p\,dt = 1$, имеем

$$\sigma(f,g) = \int_a^b pfg\,dt, \sigma(f) = \int_a^b pf\,dt, \sigma(g) = \int_a^b pg\,dt.$$

Тогда устойчивая на $\Omega_{a,b}$ неотрицательная определенность квадратичной формы

$$\psi(h) = \sigma(f,g)u^2 - 2|\sigma(f)\sigma(g)|uv + \sigma(fg)v^2$$

или

$$\overline{\psi(h)} = \sigma(f)\sigma(g)u^2 - 2|\sigma(fg)|uv + \sigma(f)\sigma(g)v^2, h = h(u,v) \in R^2$$

дает интегральный аналог критерия Чебышева для функций из пространства $L^2(\Omega_{a,b})$, т.е. описывает подкласс всех так называемых интегрально синхронных функций из $L^2(\Omega_{a,b})$, для которых справедливы прямые или обратные неравенства Чебышева $\sigma(fg) - |\sigma(f)\sigma(g)| \geq 0$ (для интегральной синхронности) (или $|\sigma(fg)| - \sigma(f)\sigma(g) \leq 0$ ) (для интегральной антисинхронности).

Совершенно очевидно, что результаты остаются в силе и при переходе к интегралам в смысле Стильтьеса или других видов.

2. Пусть $S(E) = l^2(N^m)$ – пространство $m$-кратных (многомерных) конечных или бесконечных последовательностей элементов $a$ данного множества $X$.

$$a:\ N^m \to X$$

$m \in N^m, N^n = N \times N \times \cdots \times N$, $m = (m_1, \dots m_n), l = (l, \dots l)$, $j = (j_1, \dots, j_n) \sum_{j=1}^{m} \square = \sum_{j_1=1}^{m_1} \square \dots \sum_{j_n=1}^{n} \square.$

Положим $x = (a), y = (b)$. Взвешенные средние обозначим

$$\sigma(pa) = \sigma(a) = \frac{\Sigma pa}{\Sigma p}, \sigma(pb) = \sigma(b) = \frac{\Sigma pb}{\Sigma p}, \sigma(pab) = \frac{\Sigma pab}{\Sigma p}.$$

Значит $(x,y)=\sigma(ab), (px,e)=\sigma(a), (py,e)=\sigma(b)$. Тогда устойчивая на $N^m$ неотрицательность квадратичной формы

$$\psi_n(h)=\sigma(a,b)u^2-2\left|\sigma(a)\sigma(b)\right|uv+\sigma(ab)v^2 \text{ и } \overline{\psi}_n(h)$$

для всех $u,v$ совместно не равных нулю дает дискретный аналог критерия Чебышева для последовательностей из $l^2(N^m)$ т.е. описывает подкласс всех последовательностей из $l^2(N^m)$, для которых справедливы неравенства Чебышева.

3. Ряд интересных результатов получим, пользуясь тождеством

$$\left|\int_a^b f_i(t)g_j(t)dt\right|=\frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b \left|f_i(t_j)\right|\left|g_i(t_j)\right|dt. \tag{12}$$

$i,j=1,2,3,\dots,n,\ dt=dt_1,\dots,dt_n$ (Андреев, Колмогоров и др.) Из (12) с очевидностью вытекает, что если $[f,g]=\left|\int_a^b f_i(t)g_j(t)dt\right|$, $i,j=1,2,\dots,n$ (здесь вертикальные линии означают знак определителя), то все критерии для обычного скалярного произведения $(f,g)$ остаются в силе и для этого обобщенного скалярного произведения.

## § 3. Равенства в неравенствах Чебышева

Равенства в интегральных неравенствах Чебышева

$$a)\ \ \sigma(fg)-|\sigma(f)\sigma(g)|\geq 0 \ \text{ или } \ b)\ \ |\sigma(fg)|-\sigma(f)\sigma(g)\leq 0 \tag{17}$$

существенно зависят от классов рассматриваемых функций и пределов интегрирования $a,b$.

Определенно можно сказать только одно: если величины $\sigma(fg)$ и $\sigma(f)\sigma(g)$ одного знака, то равенства в неравенствах Чебышева возможны лишь в том случае, когда по крайней мере одна из функций $f$, $g$ постоянна на $\Omega_{a,b}$. Если же величины $\sigma(fg)$ и $\sigma(f)\cdot\sigma(g)$ разных знаков, $f$, $g$ обе могут быть не постоянными на $\Omega_{a,b}$.

Мы сейчас убедимся в этом для случая наиболее обобщенных классов типа Андреева, Коркина, Сонина, Колмогорова и др., а именно для классов сходно упорядоченных (синхронных) функций, когда функции $f$, $g$ удовлетворяют условию

$$[f(t)-f(g)][g(t)-g(y)]\geq 0 \tag{18}$$

почти для всех $t,y\in\Omega_{a,b}$ и веса $p\equiv 1$.

Из (18) следует, что функции $f$ и $g$ интегрально синхронны, поэтому справедливы прямые неравенства Чебышева

$$\sigma(fg)-|\sigma(f)\sigma(g)|\geq 0. \tag{19}$$

Для простоты полагаем, что функции $f$ и $g$ одного переменного $x$ из отрезка прямой $[a,b]$.

Очевидно определенный интеграл $\int_a^b h(t)dt$ при фиксированной функции $h(t)$ можно рассматривать как функцию от сегмента $[a,b]$, т.е. как аддитивную функцию области на прямой. Но сегмент определяется двумя точками – своими концами. Если один конец зафиксировать, то функция сегмента сводится к обычной функции

$$F(x)=\int_a^x h(t)dt$$

– функции верхней точки. Если выбрать вместо нижнего предела $a$ другую точку $a_1\in(a,b)$, мы изменим функцию на постоянное число

$$\int_a^{a_1} h(t)dt,$$

т.о. интеграл от функции одного переменного представляет собой однозначно определенную функцию области на прямой. Эту функцию на сегментах можно свести к функции одного переменного, определенной с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Пусть функции $f$ и $g$ удовлетворяют условиям (18). Тогда справедливы неравенства (а) из (17), т.е.

$$(b-a)\int_a^b f\,g\,dt - \left|\int_a^b f\,dt \int_a^b g\,dt\right| \geq 0 \tag{20}$$

Обозначая $b$ через $x$, получим

$$\Phi(x) = (x-a)\int_a^x f(x)g(t)dt - \left|\int_a^x f(t)dt \int_a^x g(t)dt\right|. \tag{21}$$

Нас интересует вопрос: для каких функций $f$ и $g$ функция $\Phi$ тождественно (устойчиво) равна нулю на $\Omega_{a,b} = [a,b]$, $\Phi(x) \equiv 0$.

Из (21) получаем два равенства

$$(a)\quad \Phi_1(x) = (x-a)\int_a^x f(t)g(t) - \int_a^x f(x)dt \int_a^x g(t)dt \equiv 0$$

и

$$(b)\quad \Phi_2 \equiv (x-a)\int_a^x f(t)g(t)dt + \int_a^x f(t)dt \int_a^x g(t) \equiv 0$$

Рассмотрим сначала случай $(a)$. Очевидно $\Phi_1$ – дифференцируема на $[a,b]$.

В силу тождественности этого равенства заключаем, что производная функции $\Phi_1(x)$ также равна нулю (слева и справа просто одно и то же):

$$\Phi_1^1(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt + (x-a)f(x)g(x) - f(x)\int_a^x g(t)dt - g(x)\int_a^x f(t)dt \equiv 0,$$

откуда получаем

$$\int_a^x f(t)g(t)dt - \int_a^x f(x)g(t)dt + \int_a^x f(x)g(x)dt - \int_a^x g(x)f(t)dt = 0,$$

или

$$\Phi_1^1(x) = \int_a^x [f(t)-f(x)][g(t)-g(x)]dt \equiv 0$$

Полагая здесь $x=b$, имеем

$$\Phi_1^1(b) = \int_a^b \left[f(t)-f(b)\right]\left[g(t)-g(b)\right]dt \equiv 0 \tag{22}$$

Тогда в силу свойств равенства нулю интегралов из (18), в силу (22), имеем, что

$$[f(x)-f(b)][g(t)-g(b)] \equiv 0.$$

Значит, имеем либо $f(t)-f(b)\equiv 0$ на $[a,b]$, либо $g(t)-g(b)\equiv 0$ на $[a,b]$, либо выполняются оба равенства.

Откуда $f(t)=f(b)$, либо $g(t)=g(b)$, либо справедливы оба равенства. Очевидно, что, если по крайней мере одна из функций $f$, $g$ постоянна, то справедливо равенство $\sigma(fg)-\sigma(f)\sigma(g)=0$.

Таким образом, в классах синхронных функций в неравенствах Чебышева равенство в случае а) имеет место тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из функций $f$, $g$ постоянна.

Случай б).

В этом случае ни одна из функций $f$ и $g$ может не быть постоянной. Мы ограничимся примерами:

Пусть выполнено равенство

$$\sigma(fg)+\sigma(f)\sigma(g)\equiv 0, \quad \text{на}\ \Omega_{a,b}. \tag{23}$$

или, полагая $p=1$, имеем

$$(b-a)\int_a^b f(t)g(t) + \int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt \equiv 0$$

Рассмотрим простейший случай линейных функций $f = k_1x + C_1$, $g = k_2x + C_2$. Имеем

$$(b-a)\int_a^b (k_1t + C_1)(k_2t + C_2)dt = -\int_a^b (k_1t + C_1)dt\int_a^b (k_2 + C_2)dt.$$

Левая часть равна

$$(b-a)\left[\int_a^b (k_1k_2t^2 + (k_1C_2 + k_2C_1)t + C_1C_2)dt\right] =$$
$$= (b-a)^2\left[\frac{k_1k_2}{3(b^2 + ba + a^2)} + \frac{k_1C_2 + K_2C_1}{2(b+a)} + C_1C_2\right]$$

Правая часть равна

$$-\int_a^b (k_1t + C_1)dt\int_a^b (k_2t + C_2)dt =$$
$$= -(b-a)^2\left[\frac{k_1k_2}{4(b+a)^2} + \frac{k_1C_2 + K_2C_1}{2(b+a)} + C_1C_2\right]$$

После сложения и простых преобразований получим

$$k_1k_2\frac{7b^2 + 10ba + 7a^2}{12} + (k_1C_2 + k_2C_1)(b+a) + 2C_1C_2 = 0$$

Если предположить, что $a = -b$, то имеем $\frac{k-1k_2}{12}4b^2 + 2C_1C_2 = 0$, $\frac{k_1k_2}{3}b^2 = -2C_1C_2$.
При $b = 1$, $C_1 = C_2 = 1$ имеем $k_1k_2 = -6$. Обе функции $f$ и $g$ не постоянны.

В случае $a)$ для функций $f = k_1x + C_1$, $g = k_2x + C_1$ имеем
$\frac{k_1k_2}{12(a-b)^2} = 0$, откуда либо $a = b$, либо $k_1k_2 = 0$. Тогда либо $k_1 = 0$, либо $k_2 = 0$ либо $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$. Из всех случаев следует, что по крайней мере одна функция постоянна.

**§ 4. О приложении неравенств Чебышева**

1. Неравенства Чебышева, в силу свойства (А), изначально решают экстремальные задачи во всех случаях, связанных с неравенствами Чебышева. Например, в случае малых колебаний величина $\lambda$ задает минимальную величину потенциальной энергии, которая приходится на одну единицу кинетической энергии.

2. В случае нелинейных интегральных уравнений Вольтерра типа свертки неравенства Чебышева позволяют получить сверхточные оценки решений интегрального уравнения и определить оптимальные конусные отрезки, вне которых заведомо отсутствуют решения, и т.д.

3. Сотни научных публикаций с 1779 г. (неравенство Лапласа) по сегодняшний день посвящены приложениям неравенств Чебышева в самых различных областях науки, имеющих отношение к математике.

Для исследования нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, содержащих свертки функций, мы разработали специальную (подобную той, что в этой статье) теорию сверточной интегральной синхронности (определения, леммы, теоремы, ...), в которой получили и критерии справедливости неравенств типа Чебышева для сверток функций. Эти результаты уже позволяют получить априорные оценки для решений уравнений типа Вольтерра.

Приведем здесь простой пример приложения теории сверточной интегральной синхронности к нелинейным уравнениям Вольтерра.

Обозначим через $A$ множество всех неотрицательных измеримых числовых функций $\varphi(u)$,
таких, что $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$.

Пусть $\gamma(u)$ и $\lambda(u)$ непрерывные, монотонные функции из $A$.

Введем следующие классы типа (А):

$$A^{\gamma(u)} = \left\{\varphi : \varphi \in A, \frac{\varphi(u)}{\gamma(u)} \text{ п.}\uparrow\right\};$$

$$A_{\lambda(u)} = \left\{\varphi : \varphi \in A, \frac{\varphi(u)}{\gamma(u)} \ \text{п.}\downarrow\right\};$$

$$A^{\gamma(u)}_{\lambda(u)} = A^{\gamma(u)} \cap A_{\lambda(u)}, \quad \lambda(u) \in A^{\gamma(u)};$$

Введем следующие подклассы (классы типа (П)) классов типа (А):

$$\Pi^{\gamma(u)} = \left\{\varphi : \varphi \in A^{\gamma(u)}, \exists \mu_\varphi > 0, \frac{\varphi(u)}{\gamma(u)u^{\mu_\varphi}} \ \text{п.}\uparrow\right\};$$

$$\Pi_{\lambda(u)} = \left\{\varphi : \varphi \in A_{\lambda(u)}, \exists \nu_\varphi > 0, \frac{\varphi(u)}{\lambda(u)}u^{\nu_\varphi} \ \text{п.}\downarrow\right\};$$

$$\Pi^{\gamma(u)}_{\lambda(u)} = \Pi^{\gamma(u)} \cap \Pi_{\lambda(u)}, \quad \lambda(u) \in \Pi^{\gamma(u)};$$

(знак п. $\uparrow$ означает почти возрастает).

Рассмотрим нелинейное многомерное уравнение

$$u(x) = Au(x), \; Au(x) = \int_\Omega Q(x,t)\varphi[u(t)]dt \qquad (24)$$

где $\Omega_{a,b}$ – $n$ -мерный брус в $\mathbf{R}^n$,

а) $Q(x,t)$ измеримая неотрицательная на $\Omega \times \Omega$ функция

б) $\varphi(u), \varphi(u) \in \Pi_\nu, 0 < \nu < 1$.

Пусть $K$ – конус положительных измеримых в $\Omega$ функций, на котором определен оператор $A$. $K_g \subset K$ – подконус всех функций $u(x)$ из $K$, эквивалентных монотонных функций $g(x)$: $u(x) \sim g(x)$, т.е. существуют $C_1 > 0, C_2 > 0$, что $C_1 g(x) \le u(x) \le C_2 g(x)$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия а) и б). Если существует элемент $g(x) \in K$ такой, что $Ag \sim g$. Тогда в конусе $K_g$ существует единственное решение $u_*(x)$ уравнения (1).*

Это решение можно найти методом последовательных приближений

$$u_*(x) = \lim_{n\to\infty} A^n g(x)$$

Доказательство проводится путем введения в $K_g$ метрики Биркгофа и с использованием свойств классов типа (П).

В случае сверточного ядра $Q(x,t) = K(x-t)$, в терминах сверточной интегральной синхронности, функцию $g(x)$, на которой $Ag \sim g$, можно построить явно по ядру $K(x)$ и нелинейности $\varphi$:

$$g(x) = G^{-1}\left(\int_0^x K(t)dx\right),$$

где $G^{-1}(\xi)$ обратная к функции $G(u) = \dfrac{u}{\varphi(u)}$.

Рассмотрим уравнение $u(x) = Au(x)$,

$$Au(x) = \int_0^x K(x-t)\varphi[u(t)]dt, \qquad (25)$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,\ell] \subset \mathbb{R}^n, K(x) \ge 0, K(x) > 0$ при $x > 0$.

**Теорема 3.** *Пусть функция* $g(x) = G^{-1}\left(\int_0^x K(t)dt\right), x = (x_1, \dots, x_n)$ *почти сверточно интегрально антисинхронны и выполнено условие*

$$\int_0^x K(t)\left(\int_0^t K(\tau)d\tau\right)^{\frac{\nu}{1-\nu}} dt \ge C\left(\int_0^x K(t)dt\right)^{\frac{1}{1-\nu}} \qquad (26)$$

*(В случае $n = 1$ условие (26) выполняется со знаком равенства.)*

*Тогда*

*1.* $g(x) \sim Ag(x)$

*2. Уравнение (2) имеет в* $Kg$ *единственное решение* $u_*(x)$.

*3. Это решение можно найти как предел* $u_*(x) = \lim_{n\to\infty} A^n g(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 080100441.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1954. 576 с.

2. *Чебышев П.Л.* О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах // Сообщ. и проток. зас. Мат. о-ва при Харьковск. Имп. Ун-те. II. 1882. С. 93–98.

3. *Чебышев П.Л.* Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов при разложении подинтегральной функции на множители: Приложение к 57-му тому Записок Имп. Академии Наук, № 4 (1883) // Чебышев П.Л. Полн. собр. соч. М.; Л., 1948. С. 157–169.

4. *Коркин А.Н.* Comptes rendus. 1883. XCVI. № 5. С. 326.

5. *Сонин Н.Я.* О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам // Зап. Акад. Наук. 1898. Т. VI. № 6.

6. *Armstrong T.E.* Chebushev inequalities and comonotonicity // Real Analysis Exchange. 1993/94. Vol. 19(1). P. 266–268.

7. *Franklin F.* Proof of a theorem of Tschebyscheff's on definite integrals // American Journ. 1885. Vol. 7. P. 377–379.

8. *Gauchman H.* Some integral inequalities involing Taylor's remainder // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 2003. Vol. 4. Iss. 1. Article 1.

9. *Hermite C.* Cours de la Faculte des Science de Paris. Paris, 1888.

10. *Pecaric J., Peric I.* Identities for Chebyshev functional involving derivatives of arbitrary order and applications // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 313. P. 475–483.

11. *Wagener A.* Chebyshev's algebraic inequality and comparative statics under uncertainty // University of Vienna. 2005. P. 1–11.

12. *Yakubov A.Ya.* Convolutions of weakly sinchronous functions // Integral Transforms and Special Functions. 1999. Vol. 8(3–4). P. 287–298.

13. *Heining H. and Maligranda L.* Chebyshev inequality in function *spaces* // Real Analysis Exchange. 1991–1992. Vol. 17. P. 211–247.

*Поступила в редакцию 15.12.2011 г.*
*Принята к печати 28.09.2012 г.*