ВЕСТНИК ДАГЕСТАНСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА. 2013. № 50. С. 5–8.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.5

СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Б. М. Ибрагимова

Дагестанский государственный университет

Получены точные по порядку двусторонние оценки модуля непрерывности сингулярных функций.

Exact bilateral estimates of the modulus of continuity for the singular functions are obtained.

Ключевые слова: сингулярная функция; модуль непрерывности.

Keywords: singular function; modulus of continuity.

Как известно, модулем непрерывности функции $f(x)$ $(x\in[a,b])$ называется функция $w(d,\ f)=w(d,\ f,[a,b])$, определенная при $d\geq 0$ равенством

$$w(d,\ f)=\sup\left\{\left|f(x+h)-f(x)\right|:\ 0\leq h\leq d;\ \ x,x+h\in[a,b]\right\}.$$

Вполне аналогично определяется модуль непрерывности периодических функций.

Напомним, что функция $f(x)(x\in[a,b])$ называется сингулярной, если она (на данном отрезке $[a,b]$) отлична от постоянной функции, непрерывна, имеет ограниченную вариацию и почти всюду имеет нулевую производную.

Первые примеры сингулярных на отрезке функций, спектр которых представляет собой некоторое совершенное нигде не плотное множество лебеговой меры нуль, построил Г. Кантор (пример приведен в [1]). Такие сингулярные функции называются сингулярными функциями канторовского типа.

Г. Минковский и Р. Салем построили (см., напр., [2]) сингулярные строго монотонные на отрезке функции (их спектр совпадает со всем отрезком).

Н.Н. Лузин [3] показал, что любую сингулярную функцию можно представить в виде равномерно сходящегося ряда сингулярных функций канторовского типа. И.С. Кац [4, 5] доказал, что этот ряд сходится даже по вариации.

А.А. Пекарским [6] предложен один способ построения по заданному выпуклому строго возрастающему модулю непрерывности $w(d)$ (при допустимом ограничении $\frac{w(d)}{d}\to\infty$ $(d\to 0)$) сингулярной на данном отрезке функции $f(x)$, модуль непрерывности которой на этом отрезке удовлетворяет неравенству

$$w(d,\ f)\leq 4w(d)\,(d\geq 0).$$

В работе [7] по заданной функции типа модуля непрерывности построены более простые по конструкции сингулярные на отрезке $[0,1]$ функции, для которых справедливо неравенство:

$$\frac{1}{4}w(d)\leq w(d,\ f)\leq 2w(d)\ \ \left(0\leq d\leq 2w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right). \quad (*)$$

Ниже построены сингулярные функции с наперед заданным модулем непрерывности $w(d)$ (при допустимом ограничении $\frac{w(d)}{d} \to \infty \quad (d \to 0)$), а двусторонние оценки (*) модуля непрерывности существенно уточняются.

Теорема. Пусть $w(d)$ – любой строго возрастающий модуль непрерывности такой, что $w\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$, отношение $\frac{w(d)}{d}$ является строго убывающей функцией при $d > 0$, причем $\lim_{d \to +0} \frac{w(d)}{d} = \infty$.

Тогда существуют сингулярная на отрезке $[0,1]$ функция $f(x)$ и числовая последовательность $b_1 > b_2 > \mathbf{K} > b_n > \mathbf{K}$, $b_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ такие, что:

1) при всех $n = 1, 2, \mathbf{K}$ выполняется равенство $w(b_n, f) = w\left(\frac{1}{2} b_n\right)$;

2) при всех $d \in \left[0, 2w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} w\left(\frac{1}{2} d\right) \leq w(d, f) \leq 2w\left(\frac{1}{2} d\right).$$

Доказательство. Так как функция $w(d)$ является строго возрастающей, существует обратная функция $w^{-1}(t) \quad (t \geq 0)$ и из строгого убывания функции $\frac{w(d)}{d}$ при $d > 0$ вытекает строгое возрастание функции $\frac{w^{-1}(t)}{t}$ при $t > 0$, причем $\frac{w^{-1}(t)}{t} \to 0$ при $t \to +0$.

Положим $a_1 = 1 - 4w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $a_k = 2w^{-1}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - 4w^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)$ при $k = 2, 3, \mathbf{K}$

Заметим, что $a_1 > 0$ в силу условия $w\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$ и строгого возрастания функции $\frac{w^{-1}(t)}{t}$ при $t > 0$, так как $a_1 = 1 - 4w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{\omega^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} >$ $1 - 2w^{-1}(1) \geq 0$ и $1 - 2w^{-1}(1) \geq 0$ равносильно $w\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$. Остальные неравенства $a_k > 0$ ($k = 2, 3, \mathbf{K}$) справедливы в силу строгого возрастания функции $\frac{w^{-1}(t)}{t}$ при $t > 0$, так как при $k = 2, 3, \mathbf{K}$ имеем

$$a_k = \frac{1}{2^{k-2}} \left(2^{k-1} w^{-1}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - 2^k w^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right) \right) > 0.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_n$ и найдем его частичные суммы:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_k = 1 - 4w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(2^k w^{-1}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - 2^{k+1} w^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right) \right) =$$
$$= 1 - 2^{n+1} w^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad (n = 1, 2, \mathbf{K}). \tag{1}$$

Ясно, что $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$ в силу $\frac{w^{-1}(t)}{t} \to 0$ при $t \to +0$.

Исходя из последовательности $a_1, a_2, \mathbf{K}$, построим последовательность $b_1, b_2, \mathbf{K}$ следующим образом:

$$b_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} a_1, \quad b_2 = \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} a_2, \mathbf{K}, \quad b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} - \frac{1}{2} a_n, \mathbf{K}$$

Отсюда и из равенств (1) при $n=1,2,\ldots$ получим

$$b_n = \frac{1}{2^n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}a_k\right)=\frac{1}{2^n}(1-S_n), \qquad b_n = 2w^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad w\left(\frac{1}{2}b_n\right)=\frac{1}{2^n}. \tag{2}$$

С помощью построенных числовых последовательностей $a_1,a_2,\ldots$ и $b_1,b_2,\ldots$ определим теперь на отрезке $[0,1]$ функцию $f(x)$ канторовского типа.

Положим $f(x)=\frac{1}{2}$ на интервале длины a_1 с центром в точке $\frac{1}{2}$ и исключим этот интервал из отрезка $[0,1]$.

На двух оставшихся отрезках длины b_1 каждый возьмем по одному интервалу длины a_2 с центрами соответственно в центрах этих отрезков. Положим $f(x)=\frac{1}{2^2}$ на первом слева из этих двух интервалов и $f(x)=\frac{3}{2^2}$ – на втором.

Если исключить и эти два интервала, на $[0,1]$ остается четыре отрезка длины b_2 каждый. На этих отрезках выберем по одному интервалу длины a_3, центры которых совпадают с центрами соответствующих отрезков. На этих интервалах определим $f(x)$ равной значению середины получаемых на вертикальной оси отрезков, образуемых значениями $f(x)$ на предыдущем шаге, то есть равной $\frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}$ на интервалах последовательно слева направо; затем исключим эти четыре интервала.

Продолжив этот процесс, определим функцию $f(x)$ на всех исключаемых интервалах; их суммарная длина равна 1, так как она совпадает с суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}a_n$.

Положим $f(0)=0$, $f(1)=1$. Если E – объединение всех исключаемых по ходу построения $f(x)$ интервалов, то в остающихся точках x_0 отрезка $[0,1]$ определим значения функции следующим образом: $f(x_0)=\sup\{f(x):\ x\in E,\ \ x<x_0\}$.

В полной аналогии с «канторовой лестницей» (см., напр., [1]) показываем, что полученная функция $f(x)$ будет сингулярной на отрезке $[0,1]$.

Для оценки модуля непрерывности заметим, что $b_1 = 2w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. Поэтому для $0<d\le 2w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ найдется натуральное n такое, что $b_{n+1}<d\le b_n$ (при $d=0$ требуемое очевидно).

Пусть $x,y\in[0,1]$ и $|x-y|\le d$. Тогда по построению функции $f(x)$ получим

$$|f(x)-f(y)|\le f(b_n)=\frac{1}{2^n}.$$

Отсюда и из (2) при $b_{n+1}<d\le b_n$ ($n=1,2,\ldots$) имеем

$$|f(x)-f(y)|\le 2\frac{1}{2^{n+1}}=2w\left(\frac{1}{2}b_{n+1}\right)<2w\left(\frac{1}{2}d\right),$$

а значит, при $0\le d\le b_1$ для модуля непрерывности $w(d,f)$ получим требуемую оценку сверху: $w(d,f)\le 2w\left(\frac{1}{2}d\right)$.

Далее, из конструкции функции $f(x)$ и монотонно стремящейся к нулю последовательности $b_1,b_2,\ldots$, построенных выше, следует, что при $n=1,2,\ldots$ выполняется равенство

$$\sup\left\{\left|f(x) - f(y)\right| : \left|x - y\right| \le b_n; \quad x, y \in [0,1]\right\} = \frac{1}{2^n}.$$

Тогда с учетом (2) получим при всех $n = 1, 2, \ldots$ требуемое в теореме равенство $w(b_n,\ f) = w\ \frac{1}{2} b_n$.

Если теперь $0 < d \le 2w^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, то $b_{n+1} < d \le b_n$ при некотором $n = 1, 2, \ldots$, а поэтому $w(d,\ f) \ge w(b_{n+1},\ f) = w\left(\frac{1}{2} b_{n+1}\right) = \frac{1}{2} w\left(\frac{1}{2} b_n\right) \ge \frac{1}{2} w\left(\frac{1}{2} d\right)$, и требуемая оценка снизу для модуля непрерывности $w(d,\ f)$ также получена.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
2. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1973. 494 с.
3. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М.: ГИТТЛ, 1951. 550 с.
4. *Кац И.С.* К вопросу о структуре сингулярных функций ограниченной вариации // Успехи математических наук. 1953. Т. 8, вып. 5. С. 157–159.
5. *Кац И.С.* Сингулярные строго возрастающие функции и одна задача разбиения сегмента // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 3. С. 341–347.
6. *Пекарский А.А.* Рациональная аппроксимация сингулярных функций // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1979. №3. С. 32–40.
7. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г., Ибрагимова Б.М.* Оценки модулей непрерывности первого и второго порядков для сингулярных функций // Вестн. Дагест. гос. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 39–45.

Поступила в редакцию 29.05.2013 г.
Принята к печати 30.09.2013 г.