

## ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 517.375

### В-МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗ К-КЛАССА

В. Д. Кулиев, А. К. Курбанмагомедов

Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

Впервые К-класса задачи термоупругости поставлены в [1]. В этой же работе дан метод, именуемый В-метод, решения общего К-класса задач. В-метод решения задач термоупругости из К-класса состоит из последовательных этапов, приведенных в [1]. Задачи К-класса, как плоские, так и пространственные, представляют значительный практический интерес, например, для создания неподвижных (прессовых) соединений деталей машин. В данной статье рассматривается одна типичная плоская задача термоупругости К-класса, именуемая задачей  $K_0$ , когда геометрия

области  $S^+$ , введенной при постановке общей задачи, представляет собой прямоугольник, содержащий центральную трещину нормального разрыва. Рассматриваются этапы решения основной задачи В-методом и строятся соответствующие зависимости.

For the first time the K-class problems of thermoelasticity have been put into [1]. The same paper gives the method called the V-method for solution of the general K-class problems. The V-method consists of sequential steps given in [1]. The K-class problems, both planar and spatial are of considerable practical interest, for example, to make fixed (press) junctures of parts in machines. This article discusses one of the typical planar problem of thermoelasticity of K-class called  $K_0$ , when the geometry of the  $S^+$  field, which is entered while setting the general problem (see [1] or below in section 1) is a rectangle with the Central crack of normal breach. Stages of solving the main problem with the V-method are shown and corresponding relations are built further. complete solution of the main problem is exhaustively described in the further article "Kinetics of the growth of 'hot cracks'".

Ключевые слова: термоупругость; К-класс; смещение; напряжение; усредняющее ядро; регуляризация; задача Коши.

Keywords: problem of thermoelasticity; K-class; displacement; stress; averaging kernel; regularization of the Cauchy problem.

#### § 1. Задача термоупругости К-класса и ее общая постановка

Пусть некоторый теплопроводящий, ничем не стесненный материал, нагретый в начальный момент времени  $t = 0$  до температуры  $T = T_0 = const > 0$ , образует тело, занимающее некоторую односвязную область  $S^+$ .

Далее, пусть в бесконечной среде из того же материала, имеющей нулевую температуру  $T \equiv 0$ , вырезается отверстие в форме  $S^+$ . В это отверстие в начальный момент времени  $t = 0$  помещается тело  $S^+$  из материала с температурой  $T_0$  и в этот же момент времени жестко закрепляется по общей границе  $L$  нагретого и холодного материалов (т.е. по границе  $L$  области  $S^+$ ) так, что на  $L$  нет скачка смещения.

Используем общепринятые допущения:

1°. Все термоупругие постоянные не зависят от температуры и являются одинаковыми как для холодного, так и для горячего материалов.

2°. Материал тела считается однородным и изотропным.

Эти допущения не имеют принципиального характера, однако позволяют найти простое эффективное решение многих практически интересных задач и выявить некоторые основные качественные эффекты.

Неравенство температур среды и области  $S^+$  приводит к остыванию горячего материала, вследствие чего в заполненной им области  $S^+$  возникают растягивающие напряжения. С течением времени растягивающие напряжения возрастают, вызывая рост начальной, наиболее

опасной трещины или какого-либо эквивалентного дефекта в области  $S^+$ . При  $t \rightarrow \infty$  напряжения и размер горячей трещины стремятся к максимальным значениям.

Будем считать, что все пластические эффекты сосредоточены в малых областях вблизи контура трещины. В этом случае поставленная задача о развитии горячей трещины может быть решена в рамках механики хрупкого разрушения.

В данной статье ограничимся только нахождением напряженно-деформированного состояния.

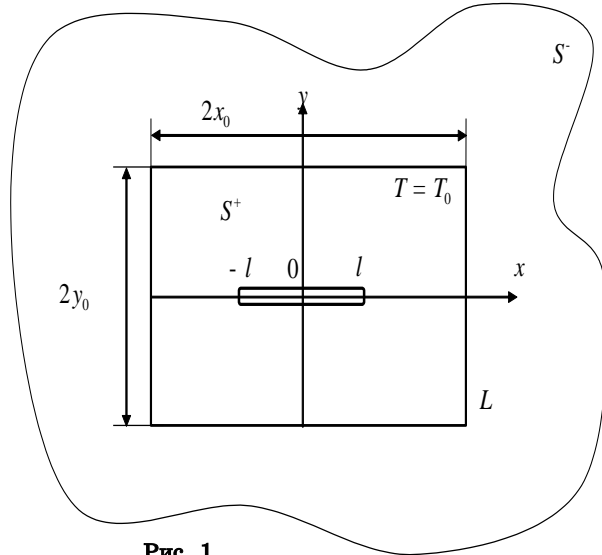


Рис. 1

### § 2. Схема решения роста «горячей» трещины

Рассмотрим задачу о кинетике роста горячей трещины в случае, когда геометрия области  $S^+$ , введенной при постановке общей задачи, достаточно проста, а именно: пусть область  $S^+$  представляет собой плоский прямоугольник со сторонами  $2x_0$  и  $2y_0$ . В дальнейшем эту задачу будем называть задачей  $K_0$ . Начало системы декартовых координат  $x$  и  $y$  выберем в центре прямоугольника, ось  $x$  направим параллельно той стороне, длина которой равна  $2x_0$  (рис. 1).

Пусть начальная трещина длиной  $2l$  расположена вдоль оси  $x$  симметрично относительно начала координат. Берега трещины свободны от внешних нагрузок. Коэффициент интенсивности напряжений на конце трещины,

получаемый при такой постановке задачи, годится также с точностью, примерно равной 10%, и для случая, когда граница тела свободна от внешних нагрузок вдоль оси  $OY$ .

Решение задачи  $K_0$  строится в таком порядке. Вначале определяется температурное поле; затем из уравнений термоупругости для тела без трещины находится распределение напряжений  $S_y$  при  $y = 0, |x| < l$ ; полученное напряжение с обратным знаком подставляется в известное [2] общее выражение для коэффициента интенсивности напряжений в случае изолированной трещины и изотермического процесса. Зависимость трещиностойкости материала  $K_c$  от температуры вне интервала хладноломкости представляется в виде [3]:

$$K_c = K_c(T(l, 0, t)). \tag{1}$$

Зависимость (1) можно определить из соответствующих экспериментальных данных с заранее заданной точностью.

Ниже предполагается, что тело находится в плосконапряженном состоянии (тонкая пластина). Полученные решения, как известно, можно использовать также для случая плоской деформации, если заменить упругие коэффициенты.

### § 3. Решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности

Пусть начальное распределение температур при  $t = 0$  имеет вид

$$T(x, y, 0) = \begin{cases} T_0 = const > 0, & \text{если } (x, y) \in S^+, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in S^-. \end{cases} \tag{2}$$

Решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c},$$

где  $a$  – коэффициент теплопроводности, принимаем [2]:

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4} \left[ \operatorname{erf} \frac{x_0 + x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{x_0 - x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{y_0 + y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{y_0 - y}{2\sqrt{at}} \right] \quad (3)$$

$$\operatorname{erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-\xi^2} d\xi,$$

При  $t \rightarrow 1$  на положительной полуоси функция  $\operatorname{erf}(t)$  стремится к пределу 1, причем весьма быстро:  $\operatorname{erf}(2)$  отличается от  $\operatorname{erf}(+\infty)$  на 0,5%.

Из (3) в пределе при  $t \rightarrow 0$  приходим к следующему представлению разрывного начального распределения температуры

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, y, t) = T_0 F(x, y), \quad (4)$$

$$F(x, y) = \frac{1}{4} [H(x_0 + x) + H(x_0 - x) + H(y_0 + y) + H(y_0 - y)]$$

Здесь  $H(h)$  – симметричная единичная функция Хевисайда:

$$H(h) = 1, \text{ при } h > 0; \frac{1}{2}, \text{ при } h = 0; 0, \text{ при } h < 0. \quad (5)$$

В данном случае аппроксимация функции  $H(h)$  проведена по следующей непрерывной функции

$$H(h) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{bh}{\sqrt{at}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{bh}{\sqrt{at}} \right) \quad (7)$$

#### § 4. Регуляризация начального распределения температур

Пусть

$$F_h(x, y) = \iint_{r < h} \omega_h(r) F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (8)$$

$$F(x, y) = [H(x_0 + x) + H(x_0 - x) - 1][H(y_0 + y) + H(y_0 - y) - 1], \quad (9)$$

где  $(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2})$ . Здесь  $\omega_h(r)$  – усредняющее ядро [4].

Функция  $F(x, y)$  – есть простейшая функция с разрывом 1-го рода. Она, очевидно, будучи локально абсолютно интегрируемой (т.е. интегрируемой по Лебегу), может рассматриваться как обобщенная функция и потому имеет частные производные любого порядка только лишь в обобщенном смысле, которые представляют собой также обобщенные функции.

Введем обозначения (см. рис. 2). Через  $S_\varepsilon^+$  обозначим область:  $|x| \leq x_0 - \varepsilon, |y| \leq y_0 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) – достаточно малая величина; через  $S_\varepsilon^-$ -область:  $E_2 \setminus D_\varepsilon$ , где  $D_\varepsilon$  есть область  $|x| \leq x_0 + \varepsilon, |y| \leq y_0 + \varepsilon$ ; через

$S^+$ -область  $|x| < x_0, |y| < y_0$ ; через  $S^-$ -область  $|x| \leq x_0, |y| \leq y_0$ ; через  $\Pi$ -область:  $D_\varepsilon \setminus S_\varepsilon^+$ .

Ниже будем использовать обозначения

$\Pi_j^\pm$  ( $j=1,2,3,4$ ). Здесь  $\Pi_1^+$  есть область:  $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon, |y| \leq y_0 - \varepsilon$ ;  $\Pi_1^-$ -область:  $-x_0 - \varepsilon \leq x \leq -x_0 + \varepsilon, |y| \leq y_0 - \varepsilon$ ;  $\Pi_2^+$ -область:  $y_0 - \varepsilon \leq y \leq y_0 + \varepsilon, |x| \leq x_0 - \varepsilon$ ;  $\Pi_2^-$ -область:

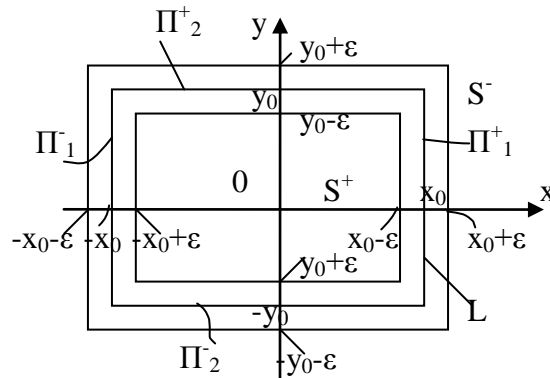


Рис. 2

$-y_0 - \varepsilon \leq y \leq -y_0 + \varepsilon$ ,  $|x| \leq x_0 - \varepsilon$ ;  $\Pi_3^\pm$ -область:  $\pm x_0 - \varepsilon \leq x \leq \pm x_0 + \varepsilon$ ,  $y_0 - \varepsilon \leq y \leq y_0 + \varepsilon$ ;  $\Pi_4^\pm$ -область:  $\pm x_0 - \varepsilon \leq x \leq \pm x_0 + \varepsilon$ ,  $-y_0 - \varepsilon \leq y \leq -y_0 + \varepsilon$ .

Границу области прямоугольника  $\bar{S}^+$  обозначим  $L$ . Если пишем  $O_h \subset S_\varepsilon^+$ , то предполагается, что  $O_h$  – окрестность точки  $M(x, y) \in S_\varepsilon^+$  целиком находится в области  $S_\varepsilon^+$  и ее окружность не пересекается с границей  $L$ . Если пишем  $O_\varepsilon \subset S_\varepsilon^+$ , то предполагается, что радиус усреднения  $h$  равен  $\varepsilon$ , т.е. радиус усреднения  $h$  может быть взято сколь угодно малым.

Сформулируем свойства функции  $F_h(x, y)$ .

**Лемма.** Функция  $F_h(x, y)$ , определяемой по формуле (8), обладает свойствами [5]:

1ε. Она непрерывна на всей плоскости  $E_2$ , причем

$$F_h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in S_\varepsilon^+, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in S_\varepsilon^-, \end{cases} \quad (10)$$

а внутри области  $\Pi$  (т.е. когда  $(x, y) \in \Pi$ ) она имеет некоторые значения, отличные от нуля и единицы.

2ε. Она имеет непрерывные всевозможные частные производные любого порядка на всей плоскости  $E_2$ , причем все ее частные производные равны нулю везде, за исключением внутри области  $\Pi$ , где они, вообще говоря, отличны от нуля.

### § 5. Логарифмический потенциал

Рассмотрим логарифмический потенциал

$$\Phi_0(x, y) = -\frac{T_0}{2\pi} \iint_{D_\varepsilon} F_h(\xi, \eta) \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta, \quad (11)$$

$$F_h(\xi, \eta) = \iint_{r \in O_h} \omega_h(r) F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (12)$$

$$F(\alpha, \beta) = \left[ H(x_0 + \alpha) + H(x_0 - \alpha) - 1 \right] \left[ H(y_0 + \beta) + H(y_0 - \beta) - 1 \right], \quad (13)$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad r = \sqrt{(\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2} \quad (D_\varepsilon : |\xi| \leq x_0 + \varepsilon, \quad |\eta| \leq y_0 + \varepsilon).$$

Из (11) для любого  $(x, y) \in E_2$  получаем:

$$\Delta \Phi_0(x, y) = T_0 F_h(x, y). \quad (14)$$

Теперь рассмотрим два случая.

*Случай 1.* Пусть точка  $M(x, y)$  находится внутри  $S_\varepsilon^+$ , т.е.

$$|x| < x_0 - \varepsilon, \quad |y| < y_0 - \varepsilon, \quad (15)$$

и пусть точка  $P(\xi, \eta)$  – любая точка  $S_\varepsilon^+$ , т.е.  $-x_0 + \varepsilon \leq \xi \leq x_0 - \varepsilon$ ,  $-y_0 + \varepsilon \leq \eta \leq y_0 - \varepsilon$ . Тогда

$$F_h(\xi, \eta) = \iint_{r \in O_h} \omega_h(r) F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 1, \quad (16)$$

что следует из утверждения леммы в §4.

Поэтому

$$\Phi_0(x, y) = -\frac{T_0}{2\pi} \int_{-y_0+0}^{y_0-0} \int_{-x_0+0}^{x_0-0} \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta \quad (17)$$

$$(|x| < x_0 - \varepsilon, \quad |y| < y_0 - \varepsilon).$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Из (17) находим

$$\begin{aligned} F_0(x, y) = & \frac{T_0}{4p} (y_0 - y)^2 \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y}{x_0 - x} + \operatorname{arctg} \frac{y_0 + y}{x_0 - x} \\ & + (x_0 - x)^2 \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y}{x_0 - x} + \operatorname{arctg} \frac{y_0 + y}{x_0 - x} \\ & + (y_0 + y)^2 \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y}{x_0 - x} + \operatorname{arctg} \frac{y_0 + y}{x_0 - x} \\ & + (x_0 + x)^2 \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y}{x_0 - x} + \operatorname{arctg} \frac{y_0 + y}{x_0 - x} \\ & + (y_0 - y)(x_0 - x) \ln (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 \\ & + (y_0 - y)(x_0 + x) \ln (x_0 + x)^2 + (y_0 - y)^2 \\ & + (y_0 + y)(x_0 - x) \ln (x_0 - x)^2 + (y_0 + y)^2 \\ & + (y_0 + y)(x_0 + x) \ln (x_0 + x)^2 + (y_0 + y)^2 \} 12x_0 y_0 \} \end{aligned} \quad (18)$$

$$(|x| < x_0 - \varepsilon, \quad |y| < y_0 - \varepsilon).$$

Определим производные функции  $\Phi_0(x, y)$ . Из (18) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial x} = & \frac{T_0}{4p} 2(x_0 + x) \operatorname{arctg} \frac{y_0 + y}{x_0 + x} + \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y}{x_0 + x} \\ & - 2(x_0 - x) \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y}{x_0 - x} + \operatorname{arctg} \frac{y_0 + y}{x_0 - x} \\ & + (y_0 - y) \ln (x_0 + x)^2 + (y_0 - y)^2 \\ & + (y_0 + y) \ln (x_0 + x)^2 + (y_0 + y)^2 \\ & - (y_0 - y) \ln (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 \\ & - (y_0 + y) \ln (x_0 - x)^2 + (y_0 + y)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}_y} = & \frac{T_0}{4p} \left[ 2(y_0 + y) \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 + x}{\mathbb{K}y_0 + y} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 - x}{\mathbb{K}y_0 + y} \right. \\ & \left. - 2(y_0 - y) \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 + x}{\mathbb{K}y_0 - y} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 - x}{\mathbb{K}y_0 - y} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & + (x_0 - x) \ln \frac{\mathbb{K}x_0 - x}{\mathbb{K}x_0 + x} + (y_0 + y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}} \\ & - (x_0 - x) \ln \frac{\mathbb{K}x_0 - x}{\mathbb{K}x_0 + x} + (y_0 - y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}} \\ & + (x_0 + x) \ln \frac{\mathbb{K}x_0 + x}{\mathbb{K}x_0 - x} + (y_0 + y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}} \\ & - (x_0 + x) \ln \frac{\mathbb{K}x_0 + x}{\mathbb{K}x_0 - x} + (y_0 - y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathbb{F}_0^2}{\mathbb{F}_x^2} = \frac{T_0}{2p} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}y_0 - y}{\mathbb{K}x_0 - x} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}y_0 + y}{\mathbb{K}x_0 - x} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}y_0 + y}{\mathbb{K}x_0 + x} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}y_0 - y}{\mathbb{K}x_0 + x} \right] \quad (21),$$

$$\frac{\mathbb{F}_0^2}{\mathbb{F}_y^2} = \frac{T_0}{2p} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 - x}{\mathbb{K}y_0 - y} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 - x}{\mathbb{K}y_0 + y} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 + x}{\mathbb{K}y_0 + y} + \operatorname{arctg} \frac{\mathbb{K}x_0 + x}{\mathbb{K}y_0 - y} \right] \quad (22)$$

$$\frac{\mathbb{F}_0^2}{\mathbb{F}_x \mathbb{F}_y} = \frac{T_0}{4p} \ln \frac{\mathbb{K}x_0 + x}{\mathbb{K}x_0 - x} + \frac{(y_0 + y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}} (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}}}{\mathbb{K}x_0 - x} + \frac{(y_0 + y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}} (x_0 + x)^2 + (y_0 - y)^2 \frac{\mathbb{K}}{\mathbb{B}}}{\mathbb{K}x_0 + x}. \quad (23)$$

Эти формулы имеют место, если  $(x, y) \in S_\varepsilon^+$  ( $S_\varepsilon^+ : |x| \leq x_0 - \varepsilon, |y| \leq y_0 - \varepsilon$ ).

Можно показать, что интегралы  $\int_0^r \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}_x} dt$  и  $\int_0^r \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}_y} dt$ , если точка  $M(x, y) \in OS_\varepsilon^+$  определяются формулами

$$a \int_0^r \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}_x} dt = - \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}_x}, \quad (24)$$

$$a \int_0^r \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}_y} dt = - \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}_y} \quad (25)$$

$((x, y) \in OS_\varepsilon^+)$ .

Здесь  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}$  определяются по формулам (19) и (20).

*Случай 2.* Пусть точка  $M(x, y)$  принадлежит дополнению области  $S_\varepsilon^+$ ,  $M(x, y) \in E_2 \setminus S_\varepsilon^+$ .

В этом случае функция  $\Phi_0(x, y)$  определяется также по формуле (11).

Выше было показано, что  $F_h(\xi, \eta) \in C^{(\infty)}(E_2)$ . Поэтому вторые производные функции  $\Phi_0(x, y)$  имеют место в области  $\bar{S}^+$ .

Если, например, точка  $M(x, y)$  находится внутри полосы  $\Pi_1^+$ , т.е. если

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \quad |y| < y_0 + \varepsilon, \quad (28)$$

то из (14) находим

$$\Delta\Phi_0 = T_0 F_h(x, y). \quad (30)$$

Заметим, что  $F_h(x, y) \equiv 0$ , если  $(x, y) \in S_\varepsilon^-$ .

### § 6. Деформации, возникающие при нагреве

Рассмотрим выделенный дифференциально-малый элемент, представляющий собой прямоугольник со сторонами  $dx$  и  $dy$ .

Поскольку теплопроводящий, ничем не стесненный материал, который образует тело, занимающее область  $\bar{S}^+$  (в рассматриваемой задаче  $K_0$  область  $\bar{S}^+$  есть прямоугольник, который представлен на рис. 1), в начальный момент времени  $t=0$  обладает температурой  $T = T_0 \equiv const > 0$ , то выделенный элемент в этот момент времени имеют следующие тепловые деформации:

$$\bar{\varepsilon}_x = \alpha T_0, \quad \bar{\varepsilon}_y = \alpha T_0, \quad \bar{\gamma}_{xy} = 0. \quad (31)$$

Если  $(x, y) \notin \bar{S}^+$ , то соответствующие тепловые деформации отсутствуют

$$\bar{\varepsilon}_x = 0, \quad \bar{\varepsilon}_y = 0, \quad \bar{\gamma}_{xy} = 0, \quad (32)$$

ибо температура материала вне области  $\bar{S}^+$  в начальный момент времени  $t=0$  равна нулю.

Из постановки рассматриваемой задачи следует, что при  $t > 0$  происходит охлаждение тела в области  $\bar{S}^+$ , вследствие чего повсюду возникают деформации  $\bar{\varepsilon}_x$ ,  $\bar{\varepsilon}_y$  и  $\bar{\gamma}_{xy}$  материала, которые, в общем случае, могут быть упругими или упруго-пластическими.

Полные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  при  $t > 0$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \bar{\varepsilon}_x(x, y, t) + \alpha T(x, y, t), \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \bar{\varepsilon}_y(x, y, t) + \alpha T(x, y, t), \\ \gamma_{xy}(x, y, t) &= \bar{\gamma}_{xy}(x, y, t). \end{aligned} \quad (33)$$

Определяемые таким образом деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  при  $t > 0$  должны удовлетворять условию сплошности тела – условию совместности деформаций Сен-Венана [2]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (34)$$

везде и всюду как при упругих, так и при упруго-пластических деформациях.

Из (33) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \bar{\varepsilon}_x(x, y, t) + \alpha T(x, y, t), \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \bar{\varepsilon}_y(x, y, t) + \alpha T(x, y, t), \\ \gamma_{xy}(x, y, t) &= \bar{\gamma}_{xy}(x, y, t). \end{aligned} \quad (35)$$

### § 7. Напряжения, возникающие при нагреве

В дальнейшем предполагается, что для сформулированной нами задачи  $K_0$  справедлива гипотеза Неймана [7–11]. Она гласит: в изотропной линейно-упругой среде, если не превзойден предел пропорциональности, компоненты тензора деформации  $\bar{\varepsilon}_x$ ,  $\bar{\varepsilon}_y$  и  $\bar{\gamma}_{xy}$  связаны с

соответствующими компонентами тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  формулами обобщенного закона Гука. При этом на начальную температуру  $T_0$  налагаются условия гипотезы Неймана.

В силу этой гипотезы имеем

$$\sigma_x = \lambda \bar{e} + 2\mu \bar{\varepsilon}_x, \quad \sigma_y = \lambda \bar{e} + 2\mu \bar{\varepsilon}_y, \quad \tau_{xy} = \mu \bar{\gamma}_{xy}, \quad \bar{e} = \bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y. \quad (36)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  – постоянные Ламе.

Заметим, что для плоского напряженного состояния изотропного тела имеют место соотношения:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

а для плоской деформации:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

С помощью (35) и (36) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-\nu} [e - (1+\nu)\alpha T] - 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-\nu} [e - (1+\nu)\alpha T] - 2G\varepsilon_x, \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь  $\mu = G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Заметим, что именно эти полные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  связаны со смещениями  $u$  и  $v$  уравнениями Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (38)$$

так как, если условие Сен-Венана (37) для произвольного тензора выполнено, то можно найти такое поле перемещений, для которого этот тензор является тензором деформаций [2–11].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кулиев В.Д. Метод решения задач термоупругости К-класса // Наука и современность-2014: сб. материалов XXVIII Междунар. науч.-практ. конф. / под общ. ред. С.С. Чернова. Новосибирск: Изд-во ЦРНС, 2014. С. 46–59.
2. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит, 2005. С. 720.
3. Расчетные и экспериментальные методы анализа хрупкой прочности и усталостной долговечности конструкций из многослойных материалов / В.Д. Кулиев, И.А. Разумовский, Ф.А. Искендер-заде, А.Б. Каплун // Прочность и надежность конструкций (к 50-летию проф. В.Д. Кулиева). М.: Изд-во МГОУ, 1993. С. 23–28.
4. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. С. 575.
5. Папкович П.Ф. Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1939. 640 с.
6. Стохастическая термомеханика многослойных конструкций / А.М. Бутко, В.Д. Кулиев, Ю.Н. Новичков, И.Н. Преображенский. М.: Машиностроение, 1992. 272 с.
7. Кулиев В.Д., Ахиев А.С. Краевая трещина под действием циклической температуры // Физ.-хим. механика материалов. 1983. № 2. С. 70–76.
8. Кулиев В.Д. Некоторые проблемы механики разрушения и связанные с ней математики на рубеже XXI века // Новые технологии. Сер. матем. 1999. № 3. С. 34–35.
9. Кулиев В.Д., Алексеева Т.Н. Многослойные материалы под воздействием внешней температуры // Вестн. ЧПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. «Механика предельного состояния». 2011. № 9. С. 133–140.
10. Хечумов Р.А., Кулиев В.Д., Каплун А.Б. Инженерные задачи механики хрупкого разрушения. М.: МИСИ им В.В. Куйбышева, 1985. С. 122.

Поступила в редакцию 12.06.2014 г.



